rotationnel d'un champ de vecteurs; formule de Stokes-Ampère

1) Pour des champs de vecteurs particuliers ne comportant qu'une composante dépendant d'une seule variable autre que celle relative à la composante choisie (par exemple $\vec{B} = B_\theta(r)\vec{u}_\theta$) retrouver les composantes du rotationnel en coordonnées cylindriques en choisissant un contour élémentaire adapté.

-procéder de la même façon pour retrouver les composantes du rotationnel en coordonnées sphériques.

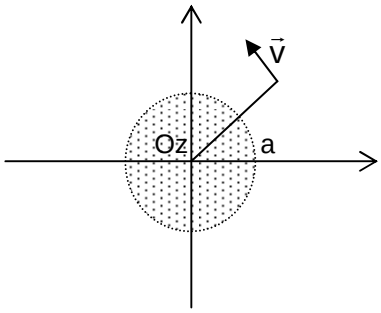
2) Calculer à partir du formulaire le rotationnel des champs suivants :

$$\vec{F} = \frac{K}{r^2}\vec{u}_r\ , \quad \vec{B} = K_1\frac{r}{2}\vec{u}_\theta\ , \quad \vec{B} = K_2\frac{a^2}{r}\vec{u}_\theta\ , \ \vec{v} = \vec{\omega}\wedge\vec{r} \quad \text{avec} \quad \vec{\omega} = \omega\vec{u}_z$$

- le premier cas est en coordonnées sphériques, les trois suivants en cylindriques.
- K, K1, K2,ω et a sont des constantes positives

vérifier dans chaque cas la relation de Stokes-Ampère sur des contours particuliers

3) Modèle d'un tourbillon de fluide (vortex) :



On considère dans le plan (Ox,Oy) le champ des vitesses $\vec{v}$ d'un fluide,

tel que $\begin{cases} \vec{v} = v(r)\vec{u}_\theta \text{ avec } \vec{rot}(\vec{v}) = 2\Omega\vec{u}_z \ \text{ si } 0 \le r \le a \\ \text{et} \quad \vec{rot}(\vec{v}) = \vec{0} \quad \text{si } r \ge a \end{cases}$

en utilisant une méthode intégrale, puis une méthode locale, trouver l'expression de v(r) dans les deux domaines ainsi définis, et tracer la courbe représentant v(r) en fonction de r.

A.N : a = 10 km, v(a) = 200 km/h (cyclone équatorial)
a = 100 m, v(a) = 400 km/h (tornade)

4) retrouver en coordonnées cartésiennes que $\vec{rot}(\vec{rot}\vec{A}) = \vec{grad}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$
(ceci constitue la définition du Laplacien vectoriel, qui en coordonnées cartésiennes est constitué du vecteur dont chacune des composantes est le laplacien scalaire des composantes de $\vec{A}$).

5) montrer, en raisonnant sur des contours, des surfaces ou des volumes bien choisis, que

$$\vec{rot}(\vec{grad}\, f) = 0 \quad \text{et} \quad \text{div}(\vec{rot}\vec{A}) = 0$$

6) retrouver en coordonnées cartésiennes les relations suivantes :

$$\text{div}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}.\vec{rot}\vec{A} - \vec{A}.\vec{rot}\vec{B}$$
$$\vec{rot}(f\vec{V}) = \vec{grad}(f)\wedge\vec{V} + f\ \vec{rot}(\vec{V})$$

7) on considère le champ $\vec{A} = Kr^n\vec{u}_\theta$ en coordonnées cylindriques avec K>0 et n entier >0.
calculer la circulation sur un cercle de rayon R, d'axe Oz par un calcul direct, puis en utilisant la formule de Stokes-Ampère.