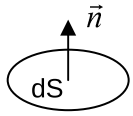
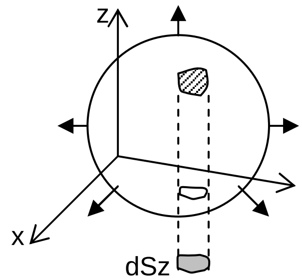
représentation d'une surface par un vecteur



un élément de surface dS sera représenté par un vecteur élémentaire
$d\vec{S} = dS\,\vec{n}$ où dS est l'aire élémentaire, et $\vec{n}$ la normale,
dont l'orientation dépend de certaines conventions.

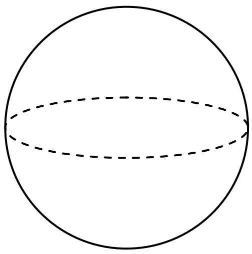


1) surfaces fermées : la normale est toujours dirigée vers l'extérieur (normale sortante) plus rarement vers l'intérieur (calcul de flux entrant)

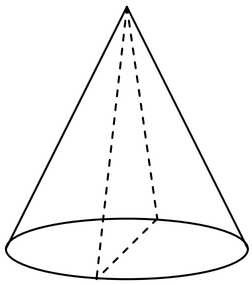
montrer en projetant le vecteur $d\vec{S}$ sur les axes de coordonnées, que le vecteur surface d'une surface fermée est toujours nul.

en séparant une surface fermée en deux surfaces s'appuyant sur un même contour, montrer que le vecteur surface sera le même, pour toute autre surface s'appuyant sur ce même contour.

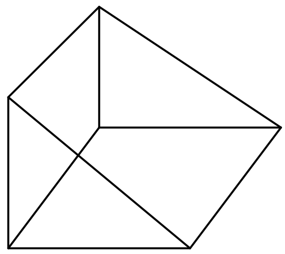
le vérifier dans les cas suivants :



demi-sphères de rayon R

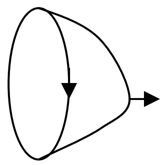


cône (rayon R, hauteur h)
puis demi-cône



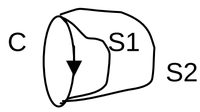
demi-cube de coté a

2) surfaces s'appuyant sur des contours fermés orientés :

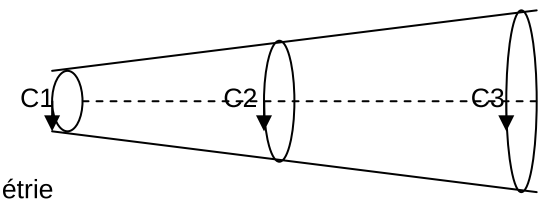


les calculs de flux $\iint \vec{A}.d\vec{S}$ se font souvent à travers des surfaces orientées par le contour sur lequel elles s'appuient.
Le vecteur surface est alors un "pseudo-vecteur".

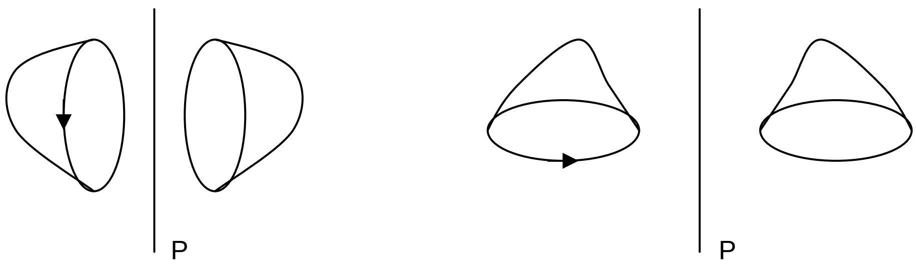
pour un champ de vecteurs à flux conservatif, le flux est nul à travers toute surface fermée (orientée avec la normale sortante).
montrer que dans ce cas, le flux à travers un contour fermé orienté ne dépend pas de la surface choisie pour le calculer



montrer que pour un tube de champ, s'appuyant sur des contours fermés orientés, le flux calculé à travers une section du tube (orientée d'après le contour) est indépendant du contour choisi.



3) pseudo-vecteurs et symétrie
orienter contour et surface, obtenus par symétrie par rapport à un plan P; conclusion ?



divergence d'un champ de vecteurs

1) En raisonnant sur un volume élémentaire en coordonnées cylindriques, retrouver l'expression de l' opérateur divergence, pour les champs suivants :

$$\vec{E}_1 = E_r(r)\vec{u}_r \quad \vec{E}_2 = E_\theta(\theta)\vec{u}_\theta \quad \vec{E}_3 = E_z(z)\vec{u}_z$$

en déduire l'expression complète de la divergence.

2) Reprendre la méthode précédente en coordonnées sphériques avec les champs :

$$\vec{E}_1 = E_r(r)\vec{u}_r \quad \vec{E}_2 = E_\theta(\theta)\vec{u}_\theta \quad \vec{E}_3 = E_\varphi(\varphi)\vec{u}_z$$

3) On considère une distribution sphérique de charges de centre O et de rayon a, telle que $\rho = {}^{dq}\!/_{d\tau} = cte$.

a) Au moyen du théorême de Gauss, calculer le champ électrique E à l'intérieur puis à l'extérieur de la distribution.

b) Exprimer la divergence de ces champs E_{int} et E_{ext} .

c) Calculer le flux de E à travers une sphére de rayon r > a et de centre O en utilisant la formule de Green-Ostrogradski. Montrer que l'on retrouve ainsi le théorême de Gauss, et que l'on peut l'exprimer sous la forme "locale" $div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$.

d) On suppose maintenant que la charge totale q reste constante, mais on fait tendre a vers zéro. Reprendre la question précédente, et montrer que le modèle de la charge ponctuelle de rayon nul conduit à des difficultés dans l'application de la formule de Green.

4) Reprendre l'exercice précédent avec une distribution de masse et le champ de gravitation g. En déduire une relation "locale" entre le champ g et sa source (la masse volumique ρ.

5) Reprendre l'exercice 3) avec une distribution cylindrique de charges, en raisonnant cette fois en coordonnées cylindriques.