champs de scalaires; opérateur gradient

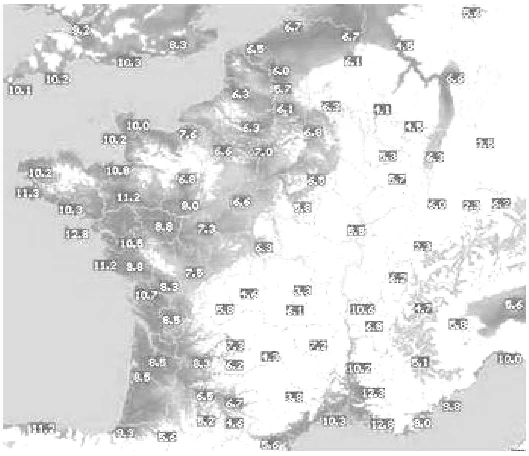
introduction : une loi physique s'exprime par une égalité (ou quelquefois une inégalité : exemple de l'entropie) entre deux expressions mathématiques, faisant intervenir des grandeurs physiques

exemple : U = RI, W = RI²t, $\vec{F} = m\vec{a}$, HΨ = EΨ etc...
En mécanique des fluides, en électromagnétisme et dans d'autres domaines, on utilise des "opérateurs" portant sur des quantités scalaires (gradient ou Laplacien pour le potentiel V) ou vectorielles (divergence et rotationnel pour les champs $\vec{E}$ ou $\vec{B}$)
Nous allons définir ici l'opérateur gradient, préciser sa signification physique, et donner son expression dans différents systèmes de coordonnées.

1Définitions, exemples

1.1 champs de scalaires

On considère une portion de l'espace, dans laquelle on associe à tout point M une fonction à valeurs réelles a(M,t), ou a(x,y,z,t) ou a(M) si les paramètres sont indépendants du temps.



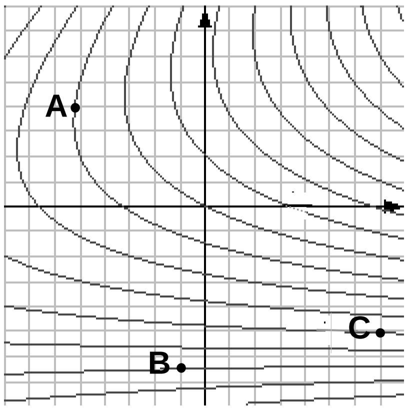
Ex : potentiel électrostatique, champ des températures ou des pressions en météorologie, masse volumique, charge volumique, etc...

1.2 représentation : tableau de nombres (voir en annexe), niveaux de gris , surface 3D
en joignant les points où a(M) a la même valeur, on obtient les courbes de niveau
(isothermes dans l'exemple ci-contre)
lorsqu'on connait la fonction a(x,y,z) le tracé des courbes de niveau s'obtient en écrivant l'équation a(x,y,z) = cte (voir exemple en TP)
autres exemples : analogie avec le relevé topographique d'une colline, équipotentielles, isobares, etc...

2. Gradient d'un champ de scalaires

2.1 expression en cartésiennes :

le vecteur gradient caractérise le taux de variation de la grandeur a(M) lorsqu'on se déplace dans l'espace. Pour une petite variation des coordonnées δx,δy,δz, a(M) varie de δa, et en coordonnées cartésiennes, on cherchera à connaître δa/δx, δa/δy, δa/δz, qui seront les composantes du vecteur gradient si δx,δy,δz tendent vers zéro; exemple :



sur la figure ci-contre, on a représenté une famille d'isothermes; chaque courbe de niveau correspond à une variation de 0,1 °C et le plan est gradué en km.

(la température augmente lorsqu'on se déplace vers le haut, à droite)

déterminer la variation ΔT/Δx et ΔT/Δy aux points A,B et C. peut-on l'identifier à δT/δx et δT/δy ?

évaluer et représenter le vecteur gradient de T aux points A,B,C.

déterminer les zones à "fort gradient de température", et les zones à "faible gradient de température".

relation de définition :utilisons cette fois les différentielles :pour une variation infiniment petite des coordonnées dx,dy,dz, a(M) varie de $da = \frac{\partial a}{\partial x}dx + \frac{\partial a}{\partial y}dy + \frac{\partial a}{\partial z}dz$;

on peut l'écrire sous la forme d'un produit scalaire $da = \begin{pmatrix} \partial a/\partial x \\ \partial a/\partial y \\ \partial a/\partial z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$

le vecteur déplacement élémentaire s'écrivant $d\vec{\ell} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$ dans la base $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ On voit que:

$da = \begin{pmatrix} \partial a/\partial x \\ \partial a/\partial y \\ \partial a/\partial z \end{pmatrix} .d\vec{\ell} = gr\vec{a}d(a).d\vec{\ell}$ en posant $gr\vec{a}d(a) = \begin{pmatrix} \partial a/\partial x \\ \partial a/\partial y \\ \partial a/\partial z \end{pmatrix}$ d'où l'expression

$\boxed{da = gr\vec{a}d(a).d\vec{\ell}}$ qui est la **définition intrinsèque** du gradient (c'est à dire indépendante du système de coordonnées).

2.2 lignes de champ ; relation avec les courbes de niveau de a(M)

les lignes de champ sont les courbes tangentes en tout point au vecteur gradient.(voir chapitre "champs de vecteurs") et les courbes de niveau ont été définies par a(M) = cte. Sur une courbe de niveau on a donc da = 0 et comme $da = gr\vec{a}d(a).d\vec{\ell}$ on en conclut que le vecteur gradient est orthogonal au déplacement élémentaire $d\vec{\ell}$ effectué sur une courbe de niveau.(voir exemple précédent)

le champ de gradient est orthogonal en tout point aux courbes de niveau de la fonction a(M) dont il dérive, et dirigé dans la direction de croissance maximale de a(M)
(il donne la direction de plus grande pente, le sens de croissance maximale, ou le sens des potentiels décroissants pour le champ électrique)

<u>exercice</u> : tracer quelques représentants du gradient sur les courbes de niveau proposées.

2.3 expressions dans les autres systèmes de coordonnées :

<u>exercice</u> :en écrivant que $da = gr\vec{a}d(a).d\vec{\ell}$ en coordonnées cylindriques puis sphériques, retrouver les expressions suivantes :

$$gr\vec{a}d(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z \quad \text{en cylindriques}$$

$$gr\vec{a}d(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi \quad \text{en sphériques}$$

on utilise quelquefois uniquement **<u>en coordonnées cartésiennes</u>**, l'opérateur Nabla :

$$\boxed{\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \quad \text{et on note } gr\vec{a}d(f) = \vec{\nabla} f}$$

3.condition pour avoir un champ de gradient. circulation entre deux points

3.1 condition pour avoir un champ de gradient

nous ne considèrerons ici que les coordonnées cartésiennes. Si $\vec{A} = gr\vec{a}d(a(M))$

$\vec{A}.d\vec{\ell} = gr\vec{a}d(a(M)).d\vec{\ell}$ = $A_x dx + A_y dy + A_z dz$ = $\frac{\partial a}{\partial x}dx + \frac{\partial a}{\partial y}dy + \frac{\partial a}{\partial z}dz$ = da

da est une différentielle exacte de a(M), et les composantes du champ A vérifient :

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x},$$ (critère de Schwarz)

c'est la condition pour avoir un champ de gradient en coordonnées cartésiennes. (pour les autres systèmes de coordonnées, il sera plus simple d'utiliser l'opérateur rotationnel).

3.2circulation d'un champ de gradient entre deux points:

calculons: $\int_A^B gr\vec{a}d(a).d\vec{\ell} = \int_A^B da = a(B) - a(A)$ on voit que le résultat ne dépend pas du chemin suivi. Conséquence: sur une courbe fermée $\int_M^M gr\vec{a}d(a).d\vec{\ell} = \int_M^M da = a(M) - a(M) = 0$

La circulation d'un champ de gradient est nulle sur une courbe fermée.
Un champ de gradient est un champ à circulation conservative.

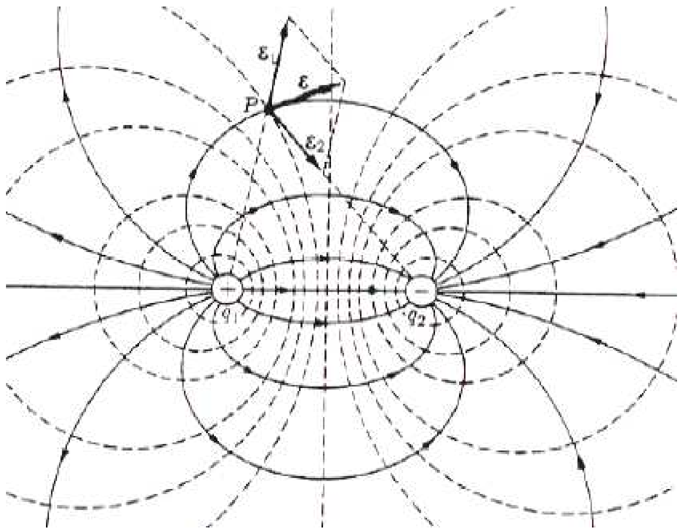
<u>exemples</u> : champ de force gravitationnelle, champ électrostatique

$\int_A^B \vec{E}.d\vec{\ell} = -\int_A^B dV = V(A) - V(B)$ et l'intégrale $\int \vec{E}.d\vec{\ell}$ <u>ne dépend pas du chemin suivi</u>

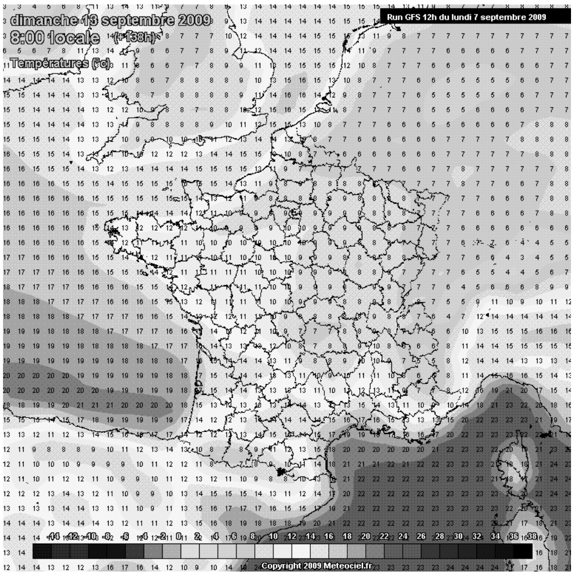
(on le retrouve en écrivant le travail de la force conservative $q\vec{E}$ et l'énergie potentielle associée :

$W = \int_A^B q\vec{E}.d\vec{\ell} = \int_A^B -dE_P = E_P(A) - E_P(B) = qV(A) - qV(B)$)

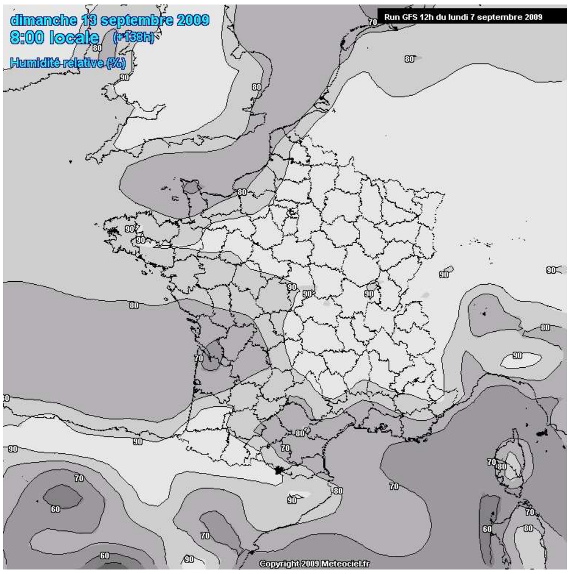
exemple: équipotentielles et lignes de champ du doublet électrostatique



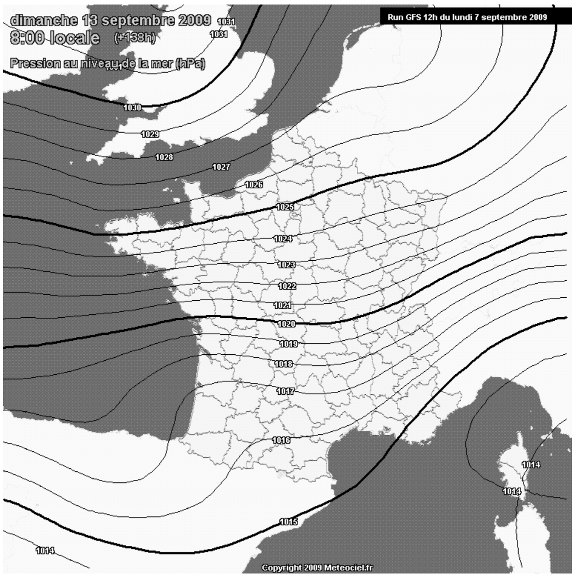
champs de scalaires



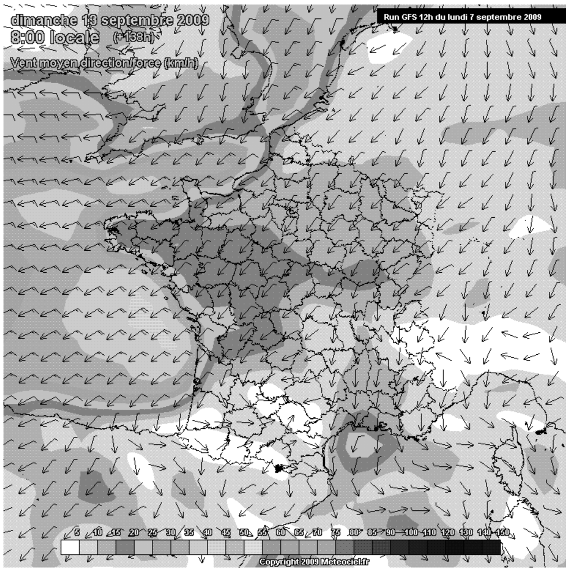
champ des températures



courbes de niveau et nuances de gris



réseau d'isobares



champ de vecteurs