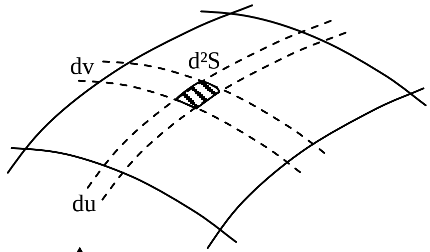
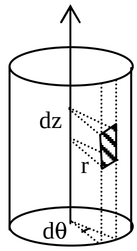
intégrales sur des surfaces ou des volumes; calculs de circulations et de flux

1 intégrales de surface
1.1 définition :



soit une surface gauche (S) dans l'espace, et un élément d²S de cette surface, centré sur le point M où est définie une fonction à valeur réelle f(M) ; l'intégrale

$I = \iint_{(S)} f(M) d^2S$ est la limite de la somme $\Sigma = \sum_i f(M_i)\delta^2 S_i$ lorsque $\delta^2 S_i \to 0$



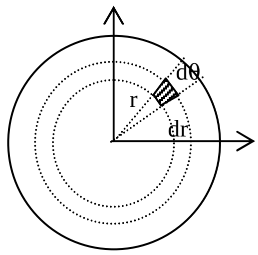
lorsqu'un point de la surface est repéré par deux coordonnées u et v,
l'élément de surface s'écrit d²S = g(M) du dv et $I = \iint_{(S)} f(M) g(M) du dv$

<u>exemple</u> : pour la surface latérale d'un cylindre g(M) = r,   u = θ et   v = z
ce qui donne   d²S = r dθ dz   et $I = \iint_{(S)} f(r,\theta,z) r d\theta dz$

quelques applications : lorsque f(M) = 1, I représente l'aire *A* de la surface;
si f(M) est la masse surfacique σ(M), I représente la masse de l'objet;
si f(M) est la distance à un axe au carré, c'est un moment quadratique $I = \iint_{(S)} r^2 d^2S$ etc...

on s'intéressera en général aux surfaces simples telles que rectangles, cercles, ellipses, cylindres, sphères...
remarque : d²S repésente une surface *doublement élémentaire* (produit de deux différentielles)

1.2 paramétrage et indépendance des variables



sur l'exemple du calcul de l'aire d'un disque, on voit que suivant le paramétrage choisi, il faut tenir compte du fait que les variables ne sont pas en général indépendantes :

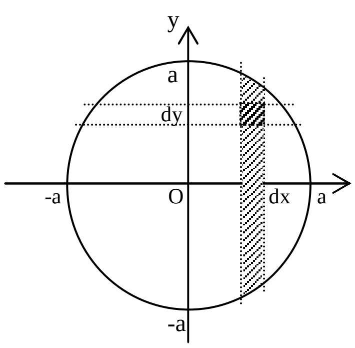
en coordonnées polaires, r et θ varient indépendamment et on peut écrire

$A = \iint d^2S = \iint r d\theta dr = \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta = \pi a^2$, résultat connu

mais en coordonnées cartésiennes, le même calcul donnerait

$A = \iint d^2S = \iint dx dy = \int_{-a}^{a} dx \int_{-a}^{a} dy = 4a^2$ ce qui est faux, car cette fois, les bornes de y dépendent de la valeur de x :

en x donné, l'équation du cercle qui définit le domaine d'intégration est : x² + y² = a² soit $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$



et cette fois $A = \int_{-a}^{a} dx \left[\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \right] = \int_{-a}^{a} 2\sqrt{a^2 - x^2} dx = 2a \int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$

posons $\frac{x}{a} = \sin\varphi$ il vient   dx = a cosφ dφ   et les bornes sont   -π/2 et π/2

$A = 2a \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi (a \cos\varphi d\varphi) = 2a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\frac{1+\cos 2\varphi}{2}) d\varphi = \pi a^2$

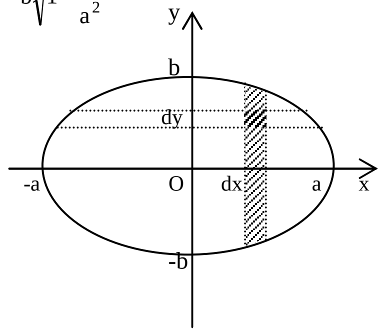
cela revient à calculer d'abord l'aire élémentaire d'une bande verticale, assimilée à un rectangle de largeur dx et de hauteur $2\sqrt{a^2 - x^2}$ en négligeant des termes d'ordre supérieur, puis à intégrer sur x variant de -a à +a ;
on peut évidemment commencer par calculer l'aire d'une bande horizontale de hauteur dy et de longueur $2\sqrt{a^2 - y^2}$

pour simplifier, on sautera souvent cette étape du calcul en prenant directement dS = $2\sqrt{a^2 - x^2}$ dx ce qui nous ramène au calcul d'une intégrale simple.

1.3 quelques exemples

-calcul en coordonnées cartésiennes de l'aire d'une surface délimitée par un contour elliptique:

l'équation cartésienne de l'ellipse est $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ et en x fixé, y varie de $-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ à $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$

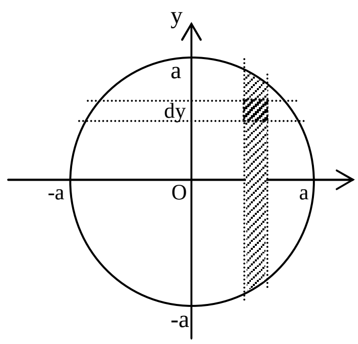


l'aire d'un rectangle élémentaire de largeur dx est $\left[\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy\right]dx = 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx$ d'où

A= $\int_{-a}^{a}\left[\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy\right]dx = \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx$ en posant $\frac{x}{a}=\sin\varphi$, dx = a cosφ dφ

et on obtient : $\boxed{A = 2ba\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\varphi d\varphi = 2ba\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi = \pi ab}$

-moment d'inertie d'un disque homogène en coordonnées cartésiennes :



$I_{Oy} = \int x^2 dm = \iint x^2\sigma d^2s$ si dm = σ d²s avec σ masse surfacique du disque

les éléments de surface situés à la même distance x de l'axe de trouvent répartis sur un rectangle élémentaire de hauteur $2\sqrt{a^2-x^2}$, on peut donc choisir comme surface élémentaire ds = $2\sqrt{a^2-x^2}dx$ et l'intégrale devient :

$I_{Oy} = \sigma\int_{-a}^{a} x^2\left[\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\right]dx = \sigma\int_{-a}^{a} x^2 2\sqrt{a^2-x^2}dx$ on pose encore $\frac{x}{a}=\sin\varphi$,

dx = a cosφ dφ et on obtient $\boxed{I_{Oy} = \sigma\frac{\pi a^4}{4} = \frac{ma^2}{4}}$ (avec m = σπa² la masse du disque)

-utilisation des symétries: relation entre I_{Ox} , I_{Oy} , et I_O dans le cas d'un disque homogène :

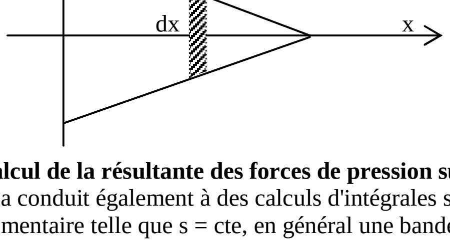
remarquons que pour un disque, la symétrie de révolution permet d'écrire:

$I_{Oy} = \int x^2 dm = \iint x^2\sigma d^2s = I_{Ox} = \int y^2 dm = \iint y^2\sigma d^2s$

on en déduit que le moment d'inertie par rapport à un axe perpendiculaire au plan du disque et passant par O est :

$\boxed{I_O = \int r^2 dm = \int (x^2+y^2)dm = I_{Oy} + I_{Ox} = 2I_{Oy} = 2I_{Ox} = \frac{ma^2}{2}}$

-calcul des coordonnées du centre de masse d'un solide plan ("plaque") :



elles s'obtiennent par $x_G = \frac{1}{m}\int x dm = \frac{1}{m}\iint x\sigma d^2s$

avec toujours dm = σ d²s , σ masse surfacique et m masse totale, et même calcul pour y_G ;

on découpera donc la surface en bandes élémentaires, parallèles respectivement à Oy et Ox.

exemple : calculer l'abscisse du centre de masse pour un triangle isocèle homogène (voir figure ci-contre)

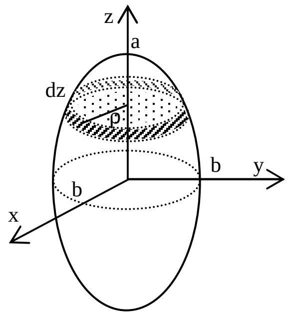
-calcul de la résultante des forces de pression sur une paroi

cela conduit également à des calculs d'intégrales sur des surfaces; si la pression dépend de z seulement, on choisit une surface élémentaire telle que s = cte, en général une bande élémentaire horizontale, voir le chapître hydrostatique.

2. intégrales de volume

il s'agit d'une intégrale du type $I = \iiint\limits_{(V)} f(M) d^3\tau$ où $d^3\tau$ est un élément de volume triplement élémentaire (dxdydz par exemple en coordonnées cartésiennes); comme pour les intégrales sur une surface, suivant le domaine d'intégration et le paramétrage choisi, les bornes d'une variable peuvent être fonction des autres variables. On cherchera encore à prendre un élément de volume le plus "intégré" possible, en tenant compte des invariances et des symétries du problème;
voyons quelques exemples:

2.1 calcul du volume d'un ellipsoïde de révolution autour de Oz (ballon de rugby)



l'équation de l'ellipsoïde est $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ ou $\frac{\rho^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$

car en z fixé, le rayon ρ vérifie $\rho^2 = x^2 + y^2$ donc $\rho = b\sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2}}$

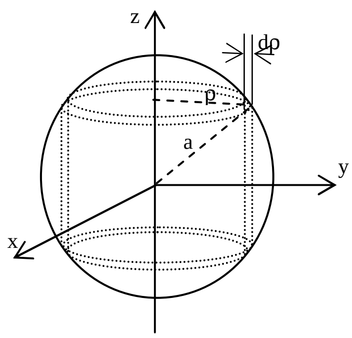
en coordonnées cylindriques $d^3\tau = r dr d\theta dz$ mais compte tenu des symétries, on peut intégrer directement sur r et sur θ et écrire $V = \iiint\limits_{(V)} r dr d\theta dz = \int_{-a}^{a} \left[\int_0^{\rho(z)} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \right] dz$

cela revient à écrire $V = \int dV$ avec $dV = \pi\rho^2 dz$ volume d'un cylindre de hauteur dz

poursuivons l'intégration : $V = \int_{-a}^{a} \pi\rho^2 dz = \int_{-a}^{a} \pi b^2 \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) dz = \frac{4}{3}\pi a b^2$ $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi a b^2}$

2.2 moment d'inertie d'une boule homogène de rayon a découpée en "tubes" élémentaires de rayon ρ :

il s'agit de l'intégrale $I_{Oz} = \iiint\limits_{(V)} \rho^2 d^3m$ où ρ est la distance de l'élément dm à l'axe Oz et $d^3m = k\, d^3\tau$; on prendra donc un élément de volume dont tous les points sont situés à la même distance ρ de l'axe Oz, soit un tube d'épaisseur dρ et de hauteur $2\sqrt{a^2 - \rho^2}$ puisque l'équation de la sphère est $\rho^2 + z^2 = a^2$, et sur la sphère $z = \pm\sqrt{a^2 - \rho^2}$



$$dV = (2\pi\rho)\left(2\sqrt{a^2 - \rho^2}\right) d\rho = 4\pi\rho\sqrt{a^2 - \rho^2}\, d\rho$$

$$I_{Oz} = k \iiint\limits_{(V)} \rho^2 d^3m = k \int_0^a \rho^2 4\pi\rho\sqrt{a^2 - \rho^2}\, d\rho$$

en posant $\frac{\rho}{a} = \sin\varphi$ et $d\rho = a \cos\varphi\, d\varphi$ avec $\varphi \in [0, \pi/2]$ on obtient :

$$I_{Oz} = k \int_0^a \rho^2 4\pi\rho\sqrt{a^2 - \rho^2}\, d\rho = 4\pi k \int_0^a a^5 \sin^3\varphi \sqrt{1 - \sin^2\varphi} \cos\varphi d\varphi = 4\pi k \int_0^a a^5 \sin^3\varphi \cos^2\varphi d\varphi$$

$$= 4\pi k \int_0^{\pi/2} a^5 (1 - \cos^2\varphi) \cos^2\varphi \sin\varphi d\varphi = 4\pi k a^5 \left[-\frac{\cos^3\varphi}{3} + \frac{\cos^5\varphi}{5} \right]_0^{\pi/2} = 4\pi k a^5 \frac{2}{15}$$

soit avec $m_{totale} = k\frac{4\pi a^3}{3}$: $\boxed{I_{0z} = \frac{2}{5} k \frac{4\pi a^3}{3} a^2 = \frac{2}{5} m_{totale} a^2}$

<u>remarque</u> : retrouver par des considérations de symétrie que $I_{0z} = I_{0x} = I_{0y}$ et en déduire que

$I_0 = \iiint\limits_{(V)} \rho^2 d^3m = \frac{3}{5} m_{totale} a^2$ où ρ est cette fois la distance au point O

3 circulation d'un champ de vecteurs sur une courbe orientée :

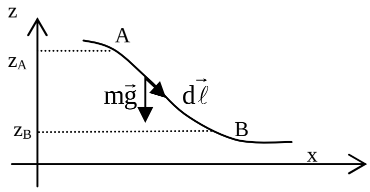
par définition la circulation élémentaire $dC = \vec{A}(M).d\vec{\ell}$ et $\boxed{C_{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{A}.d\vec{\ell}}$

3.1 travail d'une force, travail d'un poids

le travail d'une force est la circulation du champ de force sur un contour donné; lorsque la force est conservative, le travail ne dépend pas du chemin suivi pour le calculer. On dit que <u>le champ de forces est à circulation conservative</u>.

$$W_A^B = \int_A^B m\vec{g}.d\vec{\ell} = \int_A^B m(-g\vec{u}_z).(dx\vec{u}_x + dz\vec{u}_z) = \int_A^B -mgdz = -mgz_B + mgz_A$$

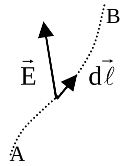
$= -E_{PB} + E_{PA} = -\Delta E_P$



3.2 circulation d'un champ électrique entre deux points et différence de potentiel

on rappelle ci-après les expressions du champ et du potentiel créés, par une charge ponctuelle :

$\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\vec{u}r$ $\quad V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o r}$ calculons la circulation de $\vec{E}$ entre A et B :



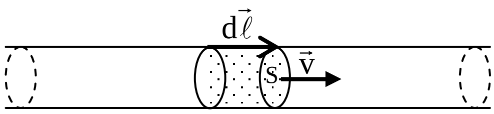
$$\int_A^B \vec{E}.d\vec{\ell} = \int_A^B \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\vec{u}r.(dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta) = \int_A^B \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left[-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A}\right] = -V_B + V_A$$

on retrouve $\int_A^B \vec{E}.d\vec{\ell} = -\Delta V$ <u>le champ électrique est encore un champ à circulation conservative</u>

4 flux d'un champ de vecteurs à travers une surface orientée

par définition $d\Phi = \vec{A}(M).d\vec{s}$ et $\boxed{\Phi = \iint_{(S)} \vec{A}(M).d\vec{s}}$

4.1 flux de la vitesse d'un fluide à travers une section d'écoulement; débit volumique



entre t et t+dt, la masse dm traversant une section donnée est contenue dans le volume $d\tau = Svdt = Sd\ell$ d'où $dm = \rho d\tau = \rho Sd\ell = \rho vSdt$

on en déduit $\boxed{D_m = \dfrac{dm}{dt} = \rho vS}$ expression qui se généralise sous la form $\boxed{D_m = \dfrac{dm}{dt} = \iint_{\text{Section}} \rho\vec{v}.d^2\vec{S}}$

le débit massique est donc le <u>flux de la "densité de courant de fluide</u> $\rho\vec{v}$

4.2 flux du champ électrostatique à travers une surface fermée

revoir les exemples de calculs abordés à propos de l'utilisation du théorême de Gauss $\displaystyle\oiint_{(s)} \vec{E}.d^2\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

4.3 flux du champ magnétique à travers un rectangle

calcul du flux du champ créé par un conducteur rectiligne infini, à travers un rectangle :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta \qquad d\vec{s} = hdr\vec{u}_\theta \quad \Phi = \int_{r=a}^{r=b} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta.hdr\vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 Ih}{2\pi}Ln\left(\frac{b}{a}\right)$$