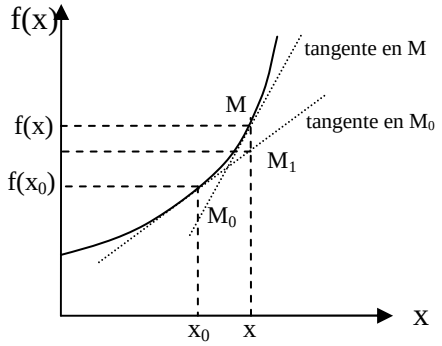
complément 1 : développements en serie de Taylor-Mac-Laurin



approche intuitive :

dans la définition de la dérivée, si δx n'est plus infiniment petit, on voit que l'accroissement de la fonction n'est plus tout à fait égal à $f'(x_0)\delta x$, puisque le point M_1 ne coïncide pas avec le point M , et que la valeur de la dérivée $f'(x_0)$ diffère de $f'(x)$;

pour tenir compte de cette variation, posons $x = x_0 + h$ et affinons le calcul en prenant la moyenne de $f'(x_0)$ et $f'(x_0 + h)$:

$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0)$ devient : $f(x_0+h)-f(x_0)=h\left(\dfrac{f'(x_0)+f'(x_0+h)}{2}\right)$

mais la dérivée de $f'(x_0)$ s'écrit : $f''(x_0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{(x_0+h)-(x_0)}=\lim_{h\to 0}\dfrac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}$

ou encore $f'(x_0+h)-f'(x_0)=hf''(x_0)$ si h est très petit ; remplaçons $f'(x_0+h)$ par $f'(x_0)+hf''(x_0)$

$f(x_0+h)-f(x_0)=h\left(\dfrac{f'(x_0)+f'(x_0)+hf''(x_0)}{2}\right)$ il vient $f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0)+\dfrac{1}{2}h^2f''(x_0)$

ou $$\boxed{f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{1}{2}h^2f''(x_0)}$$

on retrouve ainsi les trois premiers termes d'un développement en série de Taylor, et on voit que la valeur de la fonction au voisinage d'un point est la somme d'une série dont chaque terme est négligeable devant le précédent : dans l'exemple ci-dessus, on a négligé les variations de la dérivée seconde entre x_0 et x_0+h, ce qui revient à dire qu'on se limite à des termes d'ordre 2 en h, et que les termes en h^3, h^4, etc... sont infiniments petits devant ceux qui précèdent

différentes écritures d'un développement en série :

$$\boxed{f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{1}{2}h^2f''(x_0)+\frac{1}{3!}h^3f'''(x_0)+...+\frac{1}{n!}h^nf^{(n)}(x_0)+h^n\varepsilon(h)}$$

ou avec d'autres notations : $$f(a+x)=f(a)+\frac{x}{1!}f'(a)+\frac{x^2}{2!}f''(a)+\frac{x^3}{3!}f'''(a)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a)+\cdots$$

en physique on ne s'interessera pas au reste $h^n\varepsilon(h)$, toujours négligeable, qu'on symbolisera simplement par "..." lorsque $x_0 = 0$, on obtient le développement de Taylor-Mac-Laurin :

$$\boxed{y=f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\cdots}$$

complément 2 : différentielle

en mathématiques on définit la différentielle d'une fonction f(x) par la fonction linéaire de la variable h : $h\to hf'(x)$
la différentielle est notée avec un "d droit" : $df_x(h) = hf'(x)$ ou plus simplement $\boxed{df = hf'(x)}$

reprenons le développement en série d'une fonction f(x) à l'ordre 1 :

$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+h\varepsilon(h)$ ou encore $f(x+h)-f(x)=hf'(x)+h\varepsilon(h)=df+h\varepsilon(h)$

on voit que si h tend vers 0, l'accroissement de la fonction s'identifie à la différentielle df: $f(x+h)-f(x)=hf'(x)=df$

si maintenant on considère la fonction particulière $x\to x$ on obtient avec l'expression ci-dessus (x+h) - (x) = hx' = h = dx

ainsi $f(x+h)-f(x)=hf'(x)$ devient df = f'(x) dx ou encore $\boxed{\dfrac{df}{dx}=f'(x)=\partial_x f=\dfrac{\partial f}{\partial x}}$

en physique, les différentielles df, dx, dy, etc... se ramènent en fait aux petits accroissements δf, δx, δy qui sont considérés comme suffisament petits pour pouvoir mener tous les calculs au premier ordre; mais la différence de nature est essentielle entre df, dx, etc...qui sont des quantités algébriques, et les " ∂ ronds" qui sont le symbole de la dérivée.

-quelques exemples pour des fonctions de x :

d(f(x)+g(x)) = (f'(x)+g'(x))dx = f'(x)dx+g'(x)dx = df + dg

d(f.g) = (f.g)'dx = f'gdx + fg'dx = g.df + f.dg $df^2 = 2f.f'dx = 2f.df$ $df^n = nf^{n-1}.f'dx = nf^{n-1}.df$ etc...

-la dérivée seconde de f(x) s'écrira : $f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d(df)}{(dx)^2} = \frac{d^2f}{dx^2}$

-cas d'une "fonction de fonction" : $y = Ln(\cos x)$ qui peut s'écrire y(g) = Ln(g) et g(x) = cosx

or $dy = \frac{dg}{g}$ et dg = -sinx dx donc $dy = \frac{-\sin x}{\cos x}dx$ et on retrouve $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dg}\frac{dg}{dx} = \frac{\partial y}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x} = y'_g\, g'_x$

-fonction réciproque : y=f(x) donne $f'_x = \frac{dy}{dx}$ et $x=f^{-1}(y)$ donne $\left(f^{-1}\right)'_y = \frac{dx}{dy}$ on voit immédiatement que $\left(f^{-1}\right)'_y = \frac{1}{f'_x}$

-pour les fonctions de plusieurs variables :

d(a+b) = da + db d(ab) = adb + bda d(a/b) = (bda-adb)/b²
si $f=a^nb^m$ Ln(f) = nLn(a)+mLn(b) d'où dLn(f) = df/f = n(da/a) + m(db/b)

complément 3 (hors programme) : critère de Schwarz

les dérivées secondes croisées sont égales donc si $df = A(x,y)dx + B(x,y)dy$, A et B vérifient nécessairement :
$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$; *c'est la condition pour que l'expression* $A(x,y)dx + B(x,y)dy$ *soit la différentielle d'une fonction f.*

supposons cette condition réalisée :

recherche de la fonction f : il faut résoudre le système différentiel : $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = A(x,y) & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = B(x,y) & (2) \end{cases}$

on primitive (1) par rapport à x, ce qui introduit une "constante d'intégration" fonction de y

$$f(x,y) = \int A(x,y)dx = F_1(x,y) + C_1(y)$$

puis on dérive par rapport à y et on identifie à (2), ce qui permet d'obtenir l'expression de f(x,y)