ch8 équations de Maxwell en régime variable

1 forme locale et intégrale des équations de l'électromagnétisme

1.1 rappel et signification en régime quasi-permanent :

loi de force de Lorentz $\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$ conservation de la charge $\boxed{div\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$

nom	forme locale	forme intégrale	signification physique
Maxwell-flux (MΦ)	$div\vec{B} = 0$	$\oiint \vec{B}\, d^2\vec{s} = 0$	conservation du flux de **B**
Maxwell-Faraday (MF)	$r\vec{o}t\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint \vec{E}.d\vec{l} = -\iint_{S/C} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.d^2\vec{s}$	loi de Faraday (régimes quasi-permanents)
Maxwell-Gauss (MG)	$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\oiint \vec{E}.d^2\vec{s} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$	théorême de Gauss
Maxwell-Ampère (MA) (provisoire)	$r\vec{o}t\vec{B} = \mu_0\vec{j}$	$\oint \vec{B}.d\vec{l} = \iint_{S/C} \mu_0\vec{j}.d^2\vec{s}$	théorême d'Ampère (provisoire)

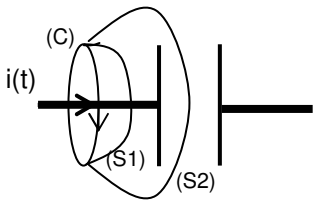
1.2.insuffisance de l'équation de M.A. en régime variable

montrons, à l'aide de deux exemples, que l'équation de Maxwell-Ampère est incompatible avec l'équation de conservation de la charge en régime variable.

<u>aspect "intégral"</u>: en régime variable, un condensateur peut être traversé par un courant i(t), qui assure la variation des charges portées par les armatures; ce courant peut créer un champ magnétique B, autour des fils.

Calculons la circulation de B sur un cercle entourant le fil :

$$\oint \vec{B}.d\vec{l} = \iint_{S1} \mu_0 \vec{j}.d^2\vec{s} = \mu_0 i$$



la seconde intégrale peut être calculée à travers toute surface s'appuyant sur le contour (C); si on la calcule à travers (S2), pour laquelle j = 0 :

$$\oint \vec{B}.d\vec{l} = \iint_{S2} \mu_0 \vec{j}.d^2\vec{s} = 0$$ il y a contradiction avec la première expression

<u>aspect "local"</u> : la divergence d'un rotationnel étant identiquement nulle, div($r\vec{o}t\vec{B}$) = 0 or $r\vec{o}t\vec{B} = \mu_0\vec{j}$

donc div($\mu_0\vec{j}$) = 0, il y a contradiction avec $div\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ qui provient de l'équation de conservation de la charge.

2. forme définitive de l'équation de M.A.Problème du référentiel.

2.1 courant de déplacement j_D

Maxwell (1864) introduit un terme supplémentaire $\vec{j}_D$, l'équation devient: $r\vec{o}t\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_D)$

$\vec{j}_D$ est appelé appelé "courant de déplacement" pour des raisons historiques.

Il vient donc div($r\vec{o}t\vec{B}$) = 0 = div $\mu_0(\vec{j} + \vec{j}_D)$ donc $div\vec{j}_D = -div\vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$

or (équation de Maxwell-Gauss) $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0 div\vec{E} = div(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$ d'où $div\vec{j}_D = div(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$

on retiendra la solution $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ vérifiée par ses conséquences.

d'où la <u>forme définitive de (M.A)</u> : $\boxed{r\vec{o}t\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})}$

2.2 conséquences

- dans l'équation de maxwell-Faraday : $\vec{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ les variations temporelles du champ magnétique sont liées aux variations spatiales du champ électrique, ce qui permet de dire " un champ B variable est source d'un champ électrique" (phénomènes d'induction),

écrivons l'équation de M-A dans le vide (j = 0): $\vec{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ cette fois, les variations temporelles du champ électrique, sont reliées aux variations spatiales du champ magnétique. On peut donc dire de même :

un champ électrique variable peut être la source d'un champ magnétique

ce "couplage" entre les deux champs, permettra d'interpréter, entre autres, la propagation du champ électromagnétique.

en régime variable, champ électrique et magnétique sont indissociables

- par ailleurs, dans un bon conducteur $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ et $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ et en régime sinusoïdal $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin \omega t$

soit pour les amplitudes : $j = \gamma E$ $\quad j_D = \varepsilon_0 \omega E_m$ $\quad$ d'où $\dfrac{j_D}{j} = \dfrac{\omega\varepsilon_0}{\gamma} = \dfrac{10^{13}10^{-12}}{10^8} = 10^{-8}$

le courant de déplacement est négligeable dans un bon conducteur.

- une combinaison linéaire des termes "sources" (ρ et $\vec{j}$) donne la même combinaison linéaire pour les champs:

si $(\rho_1, \vec{j}_1) \rightarrow (\vec{E}_1, \vec{B}_1)$ et $(\rho_2, \vec{j}_2) \rightarrow (\vec{E}_2, \vec{B}_2)$

alors $(\lambda\rho_1 + \mu\rho_2,\ \lambda\vec{j}_1 + \mu\vec{j}_2) \rightarrow (\lambda\vec{E}_1 + \mu\vec{E}_2,\ \lambda\vec{B}_1 + \mu\vec{B}_2)$

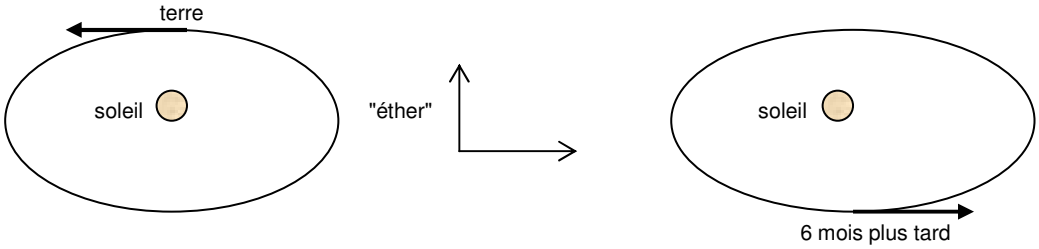
(attention toutefois aux phénomènes d'induction qui peuvent intervenir lors de la superposition)

2.3 problèmes de référentiels : (complément)

L'emploi simultané de la mécanique classique et de l'électromagnétisme conduit à certaines contradictions qui ont amené à un bouleversement des idées sur l'espace et le temps au début du XXème siècle (travaux de Lorenz, Poincaré, Einstein).

Les équations de Maxwell étaient supposées valables dans un référentiel unique appelé l' *éther*, et la lumière qui est une onde électromagnétique aurait du obéir aux lois classiques des changements de repères galiléens.

Afin de le vérifier, Michelson (en 1881) et Morley (en 1887) effectuèrent une expérience, (qui a été reprise et perfectionnée jusque vers 1950), consistant à réaliser un phénomène d'*interférences lumineuses* sur une table orientable, et à 6 mois d'intervalle:



le référentiel du laboratoire se déplaçant de manière différente par rapport à l'éther, les résultats de l'expérience auraient du être différents, suivant la position de la terre, et la position de l'appareillage.

Mais aucune modification n'a pu être constatée,ce qui n'a pas permis de mettre en évidence l'influence du référentiel; il a fallu conclure au contraire à l'*isotropie de la propagation de la lumière*, et à la *constance de la vitesse de propagation* c.

Ceci a conduit à une évolution des idées et Einstein en 1905 énonce les postulats de la théorie de la *relativité restreinte* (car restreinte aux changements de repères galiléens) :

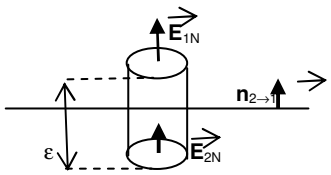
Les résultats d'une expérience ne sont pas modifiés par un changement de référentiel galiléen ; la célérité de la lumière ne dépend ni du référentiel ni de la vitesse de la source.

conséquences: établissement de formules de transformation des coordonnées d'espace et de temps (transformation de Lorentz), et des champs électrique et magnétique qui sont désormais indissociables; le temps et l'espace ne sont plus absolus; remise en question des notions usuelles d'espace, de temps et de la simultanéité de deux évènements.Par exemple, la durée de vie d'une particule se déplaçant à grande vitesse, est plus grande dans un référentiel lié à la terre, que dans un référentiel lié à la particule; la masse et l'énergie sont liées : $E = mc^2$ etc...

3. relation entre les composantes des champs de part et d'autre d'une interface
3.1 champ électrique E

En appliquant le théorême de Gauss à un petit cylindre dont les faces se trouvent de part et d'autre d'une interface séparant deux milieux, on montre que :

$$\boxed{(\vec{E}_1 - \vec{E}_2).\vec{n}_{2\to 1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}} \quad \text{ou} \quad E_{1N} - E_{2N} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



En présence de charges surfaciques, la composante normale du champ électrique est discontinue.

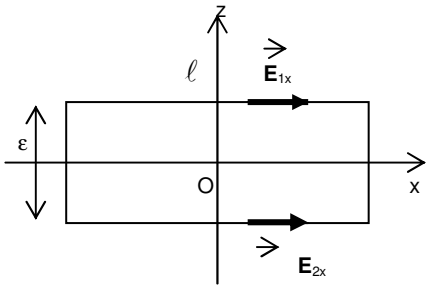
Utilisons maintenant l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\oint \vec{E}.d\vec{l} = -\iint_{S/C} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.d^2\vec{s} \text{ -> 0 si } \varepsilon \text{ -> 0}$$

donc $(E_{1x} - E_{2x})\ell = 0$

de même $(E_{1y} - E_{2y})\ell = 0$

soit $\boxed{\vec{E}_{1T} - \vec{E}_{2T} = \vec{0}}$



*on montre ainsi la continuité des composantes tangentielles du champ **E***

3.2 champ magnétique

on raisonne de la même façon que pour les composantes normales de **E** pour montrer que :

$\boxed{B_{1N} = B_{2N}}$ *la composante normale du champ magnétique est toujours continue*

l'équation de Maxwell-Ampère appliquée à un contour semblable à celui utilisé pour les composantes tangentielles de **E** donne :

$$\boxed{\vec{B}_{1T} - \vec{B}_{2T} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{2\to 1}}$$

En présence de courants surfaciques, la composante tangentielle du champ magnétique subit une discontinuité.
(Dans le cas de matériaux magnétiques, il convient de considérer le vecteur **H**).

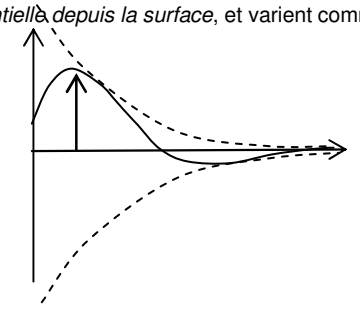
ces différentes relations se substituent aux équations de Maxwell dans le cas de distributions de charges ou de courants surfaciques

3.3 cas d'un métal :

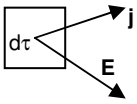
A l'intérieur d'un *métal parfaitement conducteur*, (de conductivité tendant vers l'infini) *les champs électrique et magnétique tendent vers 0.*

Pour un *métal réel*, les champs subissent une *atténuation exponentielle depuis la surface*, et varient comme $e^{-\frac{x}{\delta}}$

avec $\delta = \boxed{\sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}}$ (effet de peau)



4. énergie du champ électromagnétique, puissance échangée, vecteur de Poynting
4.1 mise en évidence de la puissance et de l'énergie du champ électromagnétique

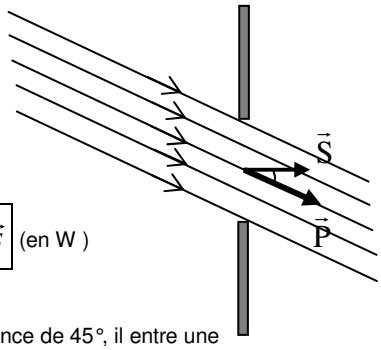


puissance cédée aux charges du milieu :

dans un conducteur, ou dans un faisceau de particules , la force agissant sur un volume dτ contenant la charge nqdτ est $d\vec{F} = nq\vec{E}\,d\tau$ et la puissance $dP = \vec{v}.d\vec{F}$

la puissance cédée aux charges du milieu s'écrira donc : $\boxed{dP = nq\vec{v}.\vec{E}\,d\tau = \vec{j}.\vec{E}d\tau}$

pour un conducteur ohmique, on a de plus la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ où γ est la conductivité et $\boxed{dP = \gamma E^2\,d\tau}$



puissance traversant une surface :

exemples : puissance électromagnétique provenant du soleil à travers une fenêtre se surface S (≈ 1 kW.m^{-2}) :

elle s'exprimera au moyen du vecteur de Poynting $\boxed{\vec{P} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}}$ (en W.m^{-2})

et la puissance est le flux du vecteur de Poynting à travers la surface $\boxed{P = \oiint \vec{P}.d\vec{s}}$ (en W)

ici P = *P*Scosθ (ou *R*Scosθ) par une fenêtre de 1m², avec des rayons d'une incidence de 45°, il entre une puissance de l'ordre de 700 W dans la pièce. C'est l'équivalent d'un petit convecteur.
De même une antenne parabolique de 0,5 m², avec *P* ≈ 1 µW.m^{-2} recueille une puissance de l'ordre de 0,5 µW.

énergie contenue dans un volume :

en régime permanent : dans un condensateur : $u_{\text{élec.}} = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ et dans une inductance : $u_{\text{magn.}} = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$

nous admettrons la généralité de ces expressions en régime variable :

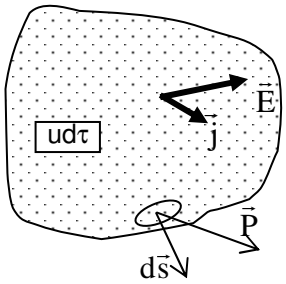
toute région de l'espace contenant un champ, contient de l'énergie, que l'on peut calculer par :

$$\boxed{E_{\text{int}} = \iiint u(M,t)d\tau} \quad \text{avec} \quad \boxed{u = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

4.2 bilan d'énergie à travers une surface fermée fixe.

soit (S), une surface fermée fixe, contenant des charges et des champs; (il peut s'agir d'une portion de conducteur) . La conservation de l'énergie impose que

entre t et t+dt : $\boxed{dE_{\text{int}} + dE_{\text{charges}} = dE_{\text{entrant}} (= -dE_{\text{sortant}})}$



exprimons $dE_{\text{int}} = \iiint u(t+dt)d\tau - \iiint u(t)d\tau = dt\iiint \dfrac{\partial u}{\partial t}d\tau$

$dE_{\text{charges}} = dt\iiint \vec{j}.\vec{E}d\tau$ et $dE_{\text{entrant}} = -dt\oiint \vec{P}.d\vec{s}$

il vient $$\iiint \frac{\partial u}{\partial t} d\tau + \iiint \vec{j}.\vec{E} d\tau = -\oiint \vec{P}.d\vec{s}$$

ou $$\iiint \frac{\partial u}{\partial t} d\tau + \iiint \vec{j}.\vec{E} d\tau + \oiint \vec{P}.d\vec{s} = 0$$

soit $$\boxed{\iiint \frac{\partial u}{\partial t} d\tau + \iiint \vec{j}.\vec{E} d\tau + \iiint div\vec{P} d\tau = 0}$$

<u>remarque</u> : si on rassemble ces trois intégrales en une seule : $\iiint (\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{j}.\vec{E} + div\vec{P}) d\tau = 0$

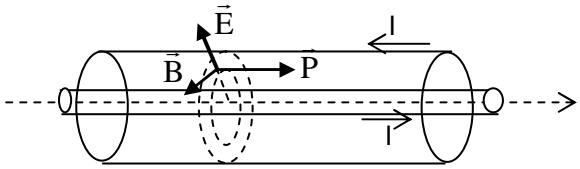
ce bilan peut donc s'exprimer localement sous la forme

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{j}.\vec{E} + div\vec{P} = 0}$$ (identité de poynting)

4.3 exemple : expression de l'énergie échangée entre un générateur et une résistance, au moyen d'un câble coaxial:

plaçons nous en régime permanent, les champs s'écrivent :

$$\vec{E} = \frac{V_1 - V_2}{Ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \frac{\vec{u}_r}{r} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$



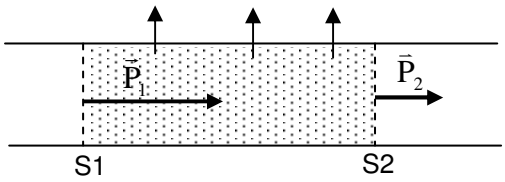
d'où $$\vec{P} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{(V_1 - V_2)I}{Ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \frac{\vec{u}_z}{2\pi r^2}$$

le flux de $\vec{P}$ à travers une section donne $$\oiint \vec{P}.d\vec{s} = \iint \frac{(V_1 - V_2)I}{Ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \frac{\vec{u}_z}{2\pi r^2} 2\pi r dr \vec{u}_z = (V_1 - V_2)I$$

on retrouve bien la puissance transportée par le câble.

<u>remarques</u> : nous sommes bien en régime permanent, il ne s'agit pas de puissance rayonnée (ondes), mais de *puissance exprimée en fonction des champs électrique et magnétique.*

il n'y a pas ici de puissance cédée aux charges (conducteurs parfaits) et l'énergie contenue dans un tronçon de conducteur ne varie pas au cours du temps ($\frac{\partial u}{\partial t} = 0$)

la puissance exprimée à travers une section quelconque du conducteur est constante, le vecteur de poynting est donc dans ce cas un champ à flux conservatif.

pour un conducteur ohmique en régime permanent, l'énergie contenue dans un tronçon de conducteur reste constante, mais la différence entre les puissances calculées sur deux sections du cable, correspondrait à l'énergie perdue par unité de temps par effet Joule dans le volume contenu entre ces deux sections (puissance cédée aux charges).