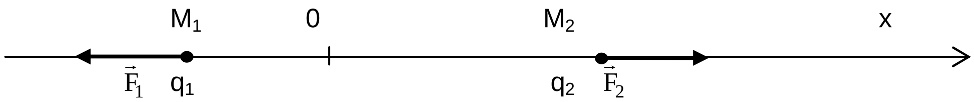
énergie électrique et magnétique en régime quasi-stationnaire

préliminaires :

énergie d'une charge q dans un potentiel V:

elle est soumise à la force $\vec{F} = q\vec{E}$ et le travail s'écrit $\delta W = q\vec{E}.d\vec{\ell} = -qdV = -dE_P$
on en déduit $\boxed{E_P = qV}$ en prenant $E_P = 0$ lorsque V_0 .

énergie de deux charges libres en interaction : (par exemple 2 charges positives)

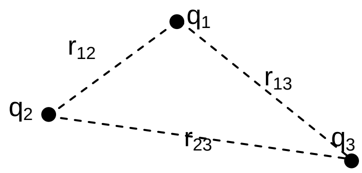


$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 = \dfrac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^2}\vec{u}_x$ et lors d'un déplacement des charges, le travail s'écrit :

$$\delta W = \vec{F}_2.d\vec{OM}_2 + \vec{F}_1.d\vec{OM}_1 = \vec{F}_2.\left(d\vec{OM}_2 - d\vec{OM}_1\right) = \frac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^2}\vec{u}_x.d\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^2}dr_{12} = -\frac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0}d\left(\frac{1}{r_{12}}\right) = -dE_P$$

on peut donc écrire : $\boxed{E_P = \dfrac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}}$ avec $E_P = 0$ lorsque r_{12} tend vers l'infini

énergie de trois charges libres en interaction :



considérons les charges deux à deux :

$$E_{P12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} \quad E_{P23} = \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}} \quad E_{P13} = \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}}$$

l'énergie totale peut s'écrire :

$$E_P = \frac{1}{2}\left[q_1\left(\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}}\right) + q_2\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}\right) + q_3\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[q_1 V_1' + q_2 V_2' + q_3 V_3'\right]$$

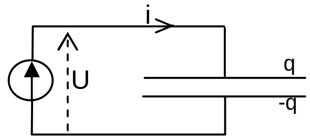
où V_1', V_2', V_3' représentent respectivement les potentiels créés sur une charge par les deux autres charges

en généralisant cette expression à un nombre quelconque de charges : $\boxed{E_P = \dfrac{1}{2}\sum_i q_i V_i'}$

1 énergie d'une distribution continue de charges

1.1 rappel : énergie volumique électrostatique

soit un condensateur plan alimenté par un générateur de tension variable :
l'énergie fournie entre t et t+dt est $\delta W = UIdt = (q/C)\,dq$
si on charge le condensateur jusqu'à la valeur Q: $W = Q^2/2C = CU^2/2$



cette énergie est contenue dans le volume eS calculons l'énergie volumique : $u_{él} = W/eS = CU^2/2eS = C(Ee)^2/2eS$

en remplaçant C par $\varepsilon_0 S/e$ il reste $u_{él} = \varepsilon_0 E^2/2$ $\boxed{u_{él} = dE_{él.}/d\tau = \varepsilon_0 E^2/2}$

on généralisera ce résultat en disant que toute portion d'espace dans laquelle existe un champ électrique **E** contient une énergie volumique $u_{él}$. $E_{él} = \boxed{\iiint_{volume} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} d\tau}$

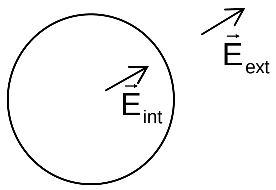
énergie d'une distribution	énergie volumique
$E = \frac{1}{2}\iiint \varepsilon_o E^2 d\tau$	$u = \frac{\varepsilon_o E^2}{2}$

1.2 énergie de constitution d'une distribution sphérique de charges

l'énergie de constitution d'une distribution de charge continue, ou énergie qu'un opérateur doit fournir pour réaliser cette distribution de charge, peut se calculer à partir de l'intégrale de cette quantité sur tout l'espace; prenons le cas d'une sphère : rayon R, charge Q, $\rho = dQ/d\tau = cte$

pour $r \le R$: $\vec{E}_{int} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}\vec{u}_r$

pour $r \ge R$: $\vec{E}_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$



on calculera l'énergie à partir de l'énergie volumique :

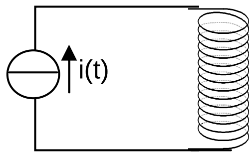
$$E_{el} = \iiint_{r\le R} \varepsilon_0 \frac{E_{int}{}^2}{2} d\tau + \iiint_{r\ge R} \varepsilon_0 \frac{E_{ext}{}^2}{2} d\tau = \int_0^R \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}\right)^2 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\left[\frac{R^5}{5R^6} + \frac{1}{R}\right] = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad \text{soit} \quad \boxed{E_{él} = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}}$$

reprendre ce calcul, en supposant qu'on réalise progressivement la distribution, en amenant des "couches d'épaisseur dr", portant la charge dq, à la surface d'une sphère de rayon r portant la charge $q(r) = Q\frac{r^3}{R^3}$; le travail élémentaire nécessaire est alors $\delta W = V(r)dq = \frac{q(r)dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$
montrer qu'on obtient le même résultat.

1.3 analogie avec le champ gravitationnel (énergie gravitationnelle d'une étoile sphérique)
$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \to -G$, $q \to m$ montrer alors que l'énergie de constitution d'une distribution de masse sphérique homogène s'écrit : $\boxed{E_{gr} = -\frac{3}{5}G\frac{M^2}{R}}$ l'énergie est cette fois négative, ce qui traduit la stabilité de la distribution (on recueille du travail au cours de la formation).

2. énergie magnétique d'une distribution de courants.
2.1 énergie volumique magnétique



soit le circuit constitué d'une inductance L (solénoïde très long), branchée aux bornes d'un générateur de courant variable i(t). la fem d'auto-induction s'écrit e = - Ldi/dt;   elle reçoit la puissance Li di/dt

entre t et t+dt l'énergie dE_m reçue par la bobine s'écrit : $dE_m = Li\,di$ et l'énergie E_m emmagasinée dans la bobine lorsque le courant varie de 0 à sa valeur maximale I s'écrit alors $E_{ém} = \frac{1}{2}LI^2$

elle est contenue dans le volume SL, dans lequel règne un champ magnétique uniforme $B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I$

d'où $E_{ém} = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{N^2}{\ell} SI^2$ qu'on peut mettre sous la forme $E_{ém} = \frac{B^2}{2\mu_0} S\ell$

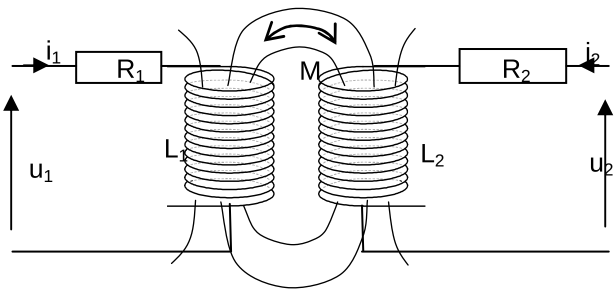
l'énergie volumique magnétique s'écrit donc : $\boxed{\frac{E_{ém}}{S\ell} = \frac{dE_{ém}}{d\tau} = \frac{B^2}{2\mu_0}}$

résultat dont nous admettrons la généralité. et donc $\boxed{E_{ém} = \iiint_{espace} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau}$

2.2 énergie emmagasinée par deux circuits en induction mutuelle :

considérons cette fois les circuits suivants en situation d'induction mutuelle :

(le signe de M dépend de l'orientation des circuits)



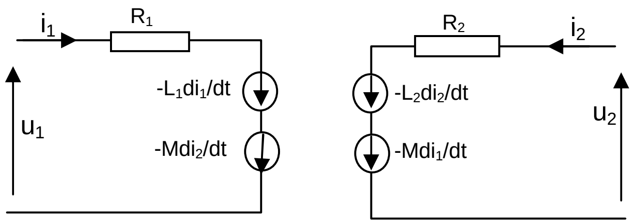
on a vu qu'en régime variable:

$$e_1 = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = -L_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} - M \frac{\partial i_2}{\partial t} \quad \text{et}$$
$$e_2 = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = -L_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} - M \frac{\partial i_1}{\partial t}$$

soit, pour le schéma équivalent :

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} + M \frac{\partial i_2}{\partial t}$$

$$u_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} + M \frac{\partial i_1}{\partial t}$$



écrivons les énergies reçues par les circuits entre t et t+dt :

$$u_1 i_1 dt = R_1 i_1^2 dt + L_1 i_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} dt + M i_1 \frac{\partial i_2}{\partial t} dt \qquad \text{et} \qquad u_2 i_2 dt = R_2 i_2^2 dt + L_2 i_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} dt + M i_2 \frac{\partial i_1}{\partial t} dt$$

l'énergie magnétique élémentaire emmagasinée dans les deux circuits s'écrit :

$$dE_m = L_1 i_1 di_1 + M i_1 di_2 + L_2 i_2 di_2 + M i_2 di_1 = d(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2)$$

lorsque les courants passent de la valeur 0 à respectivement I_1 et I_2, on obtient :

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2}$$

2.3 valeur maximale de M; coefficient de couplage

l'énergie à fournir pour faire circuler les courants est nécessairement positive

$E_m = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2 = \frac{1}{2}I_2^2(L_1x^2 + 2Mx + L_2) > 0$ en posant $x = \frac{I_1}{I_2}$

le trinôme entre parenthèses est toujours positif, donc $\Delta' = M^2 - L_1L_2 \leq 0$

ou $\boxed{|M| \leq \sqrt{L_1L_2}}$ et on pose $\boxed{k = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}}$ coefficient de couplage, compris entre -1 et +1

2.4 cas des circuits non filiformes :

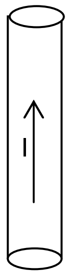
on admettra que l'énergie magnétique s'écrit encore

$E_{ém} = \frac{1}{2}LI^2 = \iiint_{espace} \frac{B^2}{2\mu_0}d\tau$ (B proportionnel à I, et donc $E_{ém}$ prop. à B^2, soit $E_{ém}=KI^2$)

ce qui permet de calculer L sans passer par le flux propre, mal défini ici :

$$\boxed{L = \frac{1}{I^2}\iiint_{(V)} \frac{B^2}{\mu_0}d\tau}$$

(exemple : conducteur cylindrique plein infini $\frac{dL}{dz} = \frac{\mu_0}{8\pi}$ H.m^{-1})



de même pour deux circuits en induction mutuelle:

$$E_{ém} = \iiint_{espace} \frac{(\vec{B}_1 + \vec{B}_2)^2}{2\mu_0}d\tau = \iiint_{espace} \frac{\vec{B}_1^{\,2}}{2\mu_0}d\tau + \iiint_{espace} \frac{\vec{B}_2^{\,2}}{2\mu_0}d\tau + \iiint_{espace} \frac{2\vec{B}_1.\vec{B}_2}{2\mu_0}d\tau$$

$$= \frac{1}{2}L_1I_1^2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2 + MI_1I_2$$

on en déduit: $\boxed{M = \frac{1}{I_1I_2}\iiint_{(V)} \frac{\vec{B}_1.\vec{B}_2}{\mu_0}d\tau}$

exemple : calcul de M pour un fil infini et un tore à partir de l'énergie

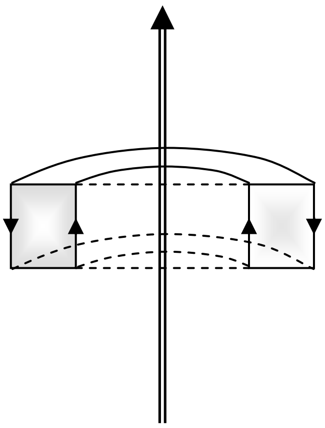


tableau récapitulatif

ENERGIE DES CHAMPS GRAVITATIONNEL ELECTROSTATIQUE ET MAGNETOSTATIQUE

énergie gravitationnelle ($\vec{g} = -\vec{\text{grad}}\,U \quad dm = \rho d\tau$)

masse m dans potentiel U'	distribution de masse
Ep = mU'	$Ep = \iiint_{distribution} \frac{\rho U}{2} d\tau$

énergie électrostatique ($\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\,V \quad dq = \rho d\tau$)

charge q dans potentiel V'	ensemble de charges	distribution de charges	en fonction du champ E
Ep = qV'	$Ep = \frac{1}{2}\sum_i q_i V'_i$	$Ep = \iiint_{distribution} \frac{\rho V}{2} d\tau$	$Ep = \iiint_{espace} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} d\tau$

énergie magnétique ($\vec{B} = \vec{\text{rot}}\,\vec{A} \quad d\vec{I} = \vec{j}.d\vec{s}$)

circuit I=cte dans B constant	ensemble de circuits	distribution de courants	en fonction du champ B
Ep = -IΦ	$Ep = \frac{1}{2}\sum_k I_k \Phi_k$	$Ep = \iiint_{courants} \frac{\vec{A}.\vec{j}}{2} d\tau$	$Ep = \iiint_{espace} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$

pour des circuits filiformes $\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2$ et $\Phi_2 = L_2 I_2 + M I_1$

donc $Ep = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$