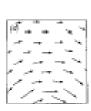
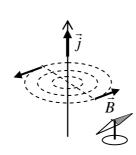
chapitre 3 magnétostatique : champs B crées par des courants constants

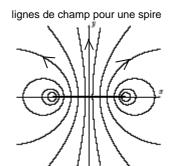
1. champ crée par des courants, symétries, loi de Biot et Savart

1.1 expériences; observation de spectres:

de la limaille de fer saupoudrée autour de différents conducteurs constitue des "dipoles magnétiques", qui s'orientent suivant les lignes de champ comme de minuscules aiguilles aimantées. On observe ainsi les spectres créés par une portion de conducteur rectiligne, une spire, un solénoïde (bobinage à spires jointives ou non). observation fondamentale : le champ magnétique "tourne" autour des courants.







une aiguille aimantée placée à proximité d'un conducteur donne le sens du champ magnétique on met en évidence des propriétés de symétrie particulières. (voir 1.2)

le champ \vec{B} est contenu dans les plans d'antisymétrie de \vec{i} le champ \vec{B} est orthogonal aux plans de symétrie de \vec{i}

analogie: champ des vitesses d'un solide en rotation:

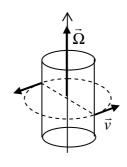
 $\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$ mais cette fois, \vec{v} est le "vrai" vecteur, et $\vec{\Omega}$ le "pseudo-vecteur"

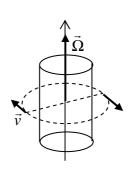
une symétrie par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe de rotation

laisse la vitesse invariante, mais change $\, \bar{\Omega} \,$ en - $\bar{\Omega} \,$

une symétrie par rapport à un plan contenant l'axe de rotation,

laisse $\bar{\Omega}$ invariant, mais change \vec{v} en - \vec{v}

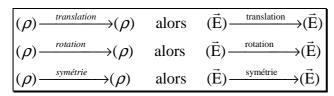


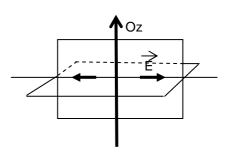


1.2 propriétés de symétrie :

rappel pour le champ électrique :

le champ (E) reste invariant lors d'une isométrie positive (translation, rotation) ou négative (symétrie par rapport à un plan) qui laisse invariante sa source, la distribution de charge $\rho(M)$:





exemple du fil infini chargé uniformément :

 ρ invariante par **translation** suivant Oz, donc (E) ne dépend pas de z p invariante par **rotation** autour de Oz, donc (**E**) ne dépend pas de θ

tout plan perpendiculaire au fil est plan de symétrie pour p

tout plan contenant le fil est plan de **symétrie** pour p

le champ E devant être invariant par ces symétries est donc contenu dans l'intersection des plans de

symétrie et

$$\vec{E} = E_r(r) \vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{r}}$$

Oz

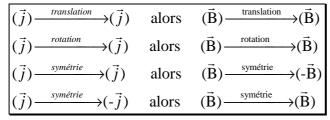
<u>cas du champ magnétique :</u> le champ (**B)** est un **pseudo-vecteur** (ou vecteur axial, résultat d'un produit vectoriel) on admettra les règles suivantes :

le champ (B) reste invariant lors d'une isométrie positive (translation, rotation) qui laisse invariante sa source, la distribution de courant (j(M))

mais:

le champ (**B**) est changé en (-**B**) lors d'une isométrie négative (symétrie par rapport à un plan) qui laisse invariante sa source, la distribution de courant (**j**(M))

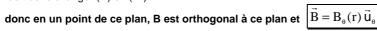
ou : le champ (B) reste invariant lors d'une isométrie négative (symétrie par rapport à un plan) qui change la distribution de courant (j(M)) en (-j(M))



on retrouve bien que le champ (**B**) est contenu dans les plans d'antisymétrie de (**j**) et qu'il est orthogonal aux plans de symétrie de (**j**)



- (j) invariante par translation suivant Oz, donc B ne dépend pas de z
- (j) invariante par **rotation** autour de Oz, donc **B** ne dépend pas de θ une **symétrie** par rapport à tout plan contenant le fil laisse (j) invariante, et doit donc changer (**B**) en (-**B**)



Le champ **B** est donc orthoradial et ne dépend que de r On vérifie bien qu'une symétrie par rapport à un plan perpendiculaire au fil change (j) en (-j) et laisse (**B**) invariant.

1.3 loi de Biot et Savart

on admet qu'on peut calculer le champ créé par une distribution de courants, en décomposant celle-ci en "éléments de courants" :

pour un "élément de courant" $\emph{Id} \vec{\ell}$:

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3} \text{ avec } \vec{r} = \vec{PM}$$

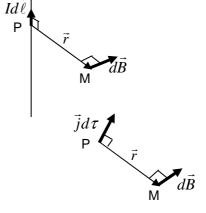
pour un "élément de courant" $ec{j}d au$:

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(P)d\tau \wedge \vec{r}}{r^3} \text{ avec } \vec{r} = \vec{PM}$$

pour un "élément de courant" $\vec{j}_s ds$:

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}_s(P)ds \wedge \vec{r}}{r^3} \text{ avec } \vec{r} = P\vec{M}$$

enfin, pour une charge unique se déplaçant à la vitesse \vec{v} :



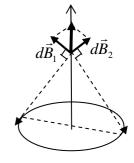
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v}(P) \wedge \vec{r}}{r^3}$$

remarques : en écrivant que $\vec{j}=nq\vec{v}$ et dN = n d τ , on peut retrouver les premières expressions à partir de la dernière.

on peut aussi retrouver les éléments de symétrie à partir de la loi de Biot et Savart : pour une spire circulaire,deux éléments de courantdiamétralement opposés donnent, pour un point de l'axe, un champ résultant porté par l'axe

le champ total s'obtient par intégration : $\begin{tabular}{c} \vec{B}(M) \\ \vec{$

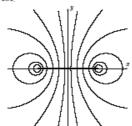
$$\vec{B}(M) = \int_{\text{(circuit)}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

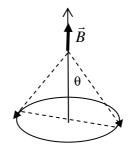


2. exemples de calculs: spire, fil infini, solénoïde

2.1 spire circulaire, en un point de l'axe

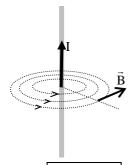
La carte de champ ci-dessous reprOy contenue dans le plan xOz.

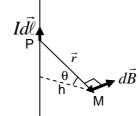




$$\vec{B}_{axe} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3(\theta) \vec{u}_z$$

2.2 portion de fil rectiligne





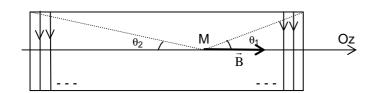
$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0 \mathbf{I}}{4\pi \mathbf{h}} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \vec{\mathbf{u}}_{\theta}$$

(pour une longueur de fil vue à la distance h sous l'angle θ_2 - θ_1)

pour un fil infini,

(remarque : 99% du champ est créé par la portion de fil vue sous les angles θ_1 = θ_2 = 82%

2.3 portion de solénoïde



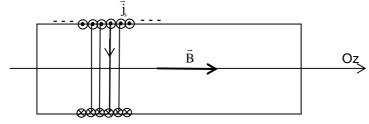
dans le cas de spires jointives , dont les rayons de la première et de la dernière sont vus depuis le point M sous

les angles θ_1 et θ_2 ,

et pour un solénoïde infini : $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{n} \mathbf{I} \vec{\mathbf{u}}_z$

remarque : on peut décrire un solénoïde constitué de fines spires jointives comme une nappe de courant :

 $dI = ndzI = \vec{j}_0 dz \vec{u}_0$ avec $|\vec{j}_0| = nI \vec{u}_0$ pour une nappe cylindrique infinie, on obtiendrait : $|\vec{B}| = \mu_0 \vec{j}_0 \vec{u}_z$



(et on remarque la discontinuité entre Bext et Bint à la traversée de la nappe de courant. Ce point sera généralisé par la suite.

3. conservation du flux de B sur toute section d'un tube de champ

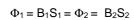
propriété fondamentale : le champ magnétique est à flux conservatif, ce qui se traduit par :

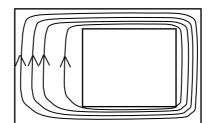
formulation intégrale : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ quelle que soit la surface fermée

formulation *locale* : $div\vec{B} = 0$ (équation de Maxwell-flux)

conséquences : le flux du champ magnétique est conservé pour toute section d'un tube de champ : exemple du

"circuit magnétique" d'un transformateur (un matériau ferromagnétique de forte perméabilité relative μ_r "canalise les lignes de champ, et est donc un tube de champ)





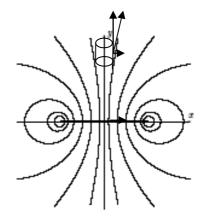
utilisons cette propriété pour calculer le champ au voisinage de l'axe d'une spire circulaire:

si on représente le champ **B** créé par une spire circulaire, on voit qu'il possède une composante radiale au voisinage de l'axe de la spire. Calculons le flux de **B** à travers un petit cylindre d'axe Oz, qui forme une surface fermée:

$$d\Phi_{total}$$
= SB_z(z+dz) - SB_z(z) + 2 π r dz B_r =0

soit avec
$$S = \pi r^2 \pi r^2 dB_z/dz = -2\pi r dzB_r$$

ou encore
$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$



en reprenant l'expression du champ créé par une spire circulaire, on calcule la composante radiale :

$$\begin{split} \vec{B}_{_{\rm r}} &= -\frac{r}{2}\frac{\partial B_{_{z}}}{\partial z}\vec{u}_{_{\rm r}} = -\frac{r}{2}\frac{\partial}{\partial \theta}\bigg(\frac{\mu_{_{0}}I}{2R}\sin^{_{3}}\theta\bigg)\frac{\partial \theta}{\partial z}\vec{u}_{_{\rm r}} \quad \text{or} \ d\theta = -\frac{\sin^{2}\theta}{R}dz \quad \text{d'où}: \\ & \vec{B}_{_{\rm r}} = \frac{3r}{4}\frac{\mu_{_{0}}I}{R^{2}}\sin^{_{4}}\theta\cos\theta\vec{u}_{_{\rm r}} \end{split} \qquad \text{ou encore} \qquad \qquad \vec{B}_{_{\rm r}} = \frac{3r}{4}\mu_{_{0}}I\frac{zR^{^{2}}}{(z^{2}+R^{2})^{2}}$$

B_r est proportionnel à r au voisinage de la spire.

4. circulation de B et théorême d'Ampère.

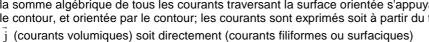
4.1 énoncé du théorême d'Ampère

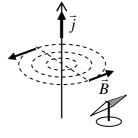
observation des lignes de champ : le champ magnétique "enlace" les courants

on admet que:

$$\oint \vec{B}. \vec{d\ell} = \iint \mu_0 \, \vec{j}. \vec{d\vec{s}} = \mu_0 \sum_i I_i \qquad \text{ou } \mu_0 \int \vec{j}_s d\ell' \, \vec{n}$$

énoncé: la circulation du champ magnétique sur un contour fermé orienté est égale à la somme algébrique de tous les courants traversant la surface orientée s'appuyant sur le contour, et orientée par le contour; les courants sont exprimés soit à partir du flux de





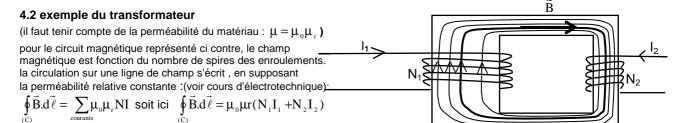
méthode d'application du théorême :

- -étude des symétries → allure des lignes de champ
- -choix du contour : en général, construit sur des lignes de champ
- -calcul de la circulation de \vec{B} , puis du flux de \vec{i} , et égalité de ces deux termes

forme locale en utilisant la relation de Stokes-Ampère pour un contour fermé fini :

$$\oint \vec{B}.d\vec{\ell} = \iint \vec{rot} \; \vec{B}.d\vec{s} \qquad \text{il vient}: \quad \oint \vec{B}.d\vec{\ell} = \iint \vec{rot} \; \vec{B}.d\vec{s} = \iint \mu_0 \; \vec{j}.d\vec{s} \quad \text{soit} \quad \vec{rotB} = \mu_0 \; \vec{j}$$

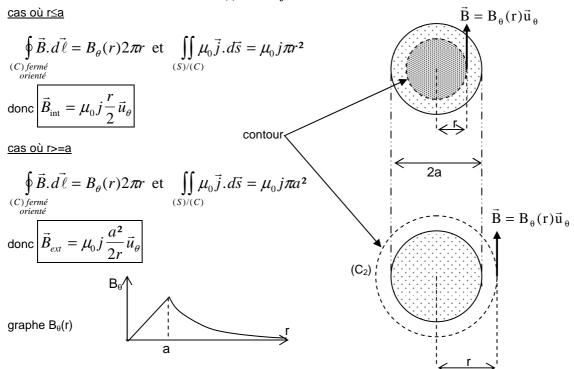
(cette relation, complétée plus tard constituera une équation fondamentale de l'électromagnétisme)



4.3 calcul de B pour un conducteur cylindrique infini de rayon a.

Les propriétés de symétrie ont permis d'établir que $B=B_{ heta}(r)\vec{u}_{ heta}$ on choisira donc un contour

circulaire entourant le conducteur. On suppose ici \vec{j} uniforme dans la section.



5 potentiel vecteur A , jauge de Coulomb, équation de Poisson de la magnétostatique

le champ magnétique B étant à flux conservatif, on peut poser $\vec{B} = \vec{rot}\vec{A}$

 $\text{par ailleurs} \quad \vec{rot}\vec{B} = \mu_{_0}\vec{j} \ = \ \vec{rot}(\vec{rot}\vec{A}) = g\vec{rad}(div\vec{A}) - \Delta\vec{A} = \mu_{_0}\vec{j} \ ,$

il vient, en faisant le "choix de Jauge de Coulomb" $div\vec{A}=0$:

 $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \, \vec{j}$ relation qui permet de calculer le potentiel vecteur à partir de ses sources.

6 comparaison de l'électrostatique et de la magnétostatique

résumons dans un tableau les équations de l'électrostatique et de la magnétostatique

potentiel dont dérive le champ :	$\vec{E} = -gr\vec{a}dV$	$\vec{B} = r\vec{o}t\vec{A}$
propriété intégrale	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \text{circulation conservative}$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \text{ champ à flux conservatif}$
propriété locale :	$r\vec{\text{ot}}(\vec{E}) = \vec{0}$	$\operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = 0$
relation entre le champ et la source:	$\iint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iiint_{\mathcal{E}} \frac{\rho}{\epsilon} d\tau \text{ théorême de Gauss}$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{s} \text{th. d'Ampère}$
intégrale :	\mathcal{L}_0	(C) fermé (S)/(C) orienté
locale :	$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ équation de Maxwell - Gauss	$\vec{\text{rot B}} = \mu_0 \vec{j}$
relation entre le potentiel et la source :	$\Delta V = -\frac{\rho}{}$ ou $\Delta V = 0$ dans le vide	$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$
équation de Laplace- Poisson	$\mathbf{\epsilon}_0$	avec la jauge de Coulomb $\operatorname{div}\vec{A} = 0$
solution pour des domaines d'extension finie :	$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho}{r} d\tau$	$A_{x} = \frac{\mu_{0}}{4\pi} \iiint \frac{j_{x}}{r} d\tau \text{etc}$
expression des champs pour une distribution	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho(P)}{r^2} d\tau \vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{r}}$	$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(P) \wedge \vec{r}}{r^3} d\tau$
finie et continue de charges ou de courant	$\vec{r} = P\vec{M}$ $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$	$\vec{\mathbf{r}} = \mathbf{P}\vec{\mathbf{M}}$

complément : une contradiction apparente

le champ magnétostatique créé par un fil infini est de la forme $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_{\theta}$

et en coordonnées cylindriques $r\vec{o}t\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_{\theta}(r))\vec{u}_z = \vec{0}$

Le champ est donc à *circulation conservative*, et on devrait pouvoir écrire $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$ quel que soit le contour

(C) fermé... pourtant l'application du théorême d'Ampère à un contour fermé circulaire entourant le fil donne : $\oint \vec{B}.d\vec{\ell} = \mu_0 I \ \text{ ce qui semble en contradiction avec la propriété précédente!}$

examinons de plus près ce qui se passe : transformons la circulation en intégrale de surface à l'aide de la formule de Stokes-Ampère, et **décomposons la surface en deux domaines** :

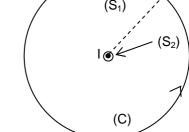
S₁ qui est vide

S₂ très petite, centrée sur le fil, où le champ et le rotationnel ne sont pas définis

$$\oint \vec{B}.d\vec{\ell} = \iint_{S_1} r\vec{o}t\vec{B}.d^2\vec{s} + \iint_{S_2} r\vec{o}t\vec{B}.d^2\vec{s}$$

le premier terme $\iint_{S_1} r \vec{o} t \vec{B} . d^2 \vec{s}$ est nul puisque le rotationnel est nul.

mais le second terme pose problème, puisque le champ et son rotationnel ne sont pas définis sur le courant filiforme...



pour donner un sens à ce terme, imaginons que le courant ne soit plus filiforme, mais soit un conducteur cylindrique de rayon a traversé par une densité j uniforme.

Le champ à l'intérieur de ce conducteur a pour expression $\vec{B}=\frac{\mu_0\,jr}{2}\vec{u}_\theta$

et son rotationnel est $\; \mu_0 j \vec{u}_z \;$ le second terme est alors calculable et donne:

$$\oint\limits_{(C)} \vec{B}.d\vec{\ell} = \mu_0 \vec{j}.\vec{S}_2 = \mu_0 I \quad \text{On retrouve bien alors le théorême d'Ampère}.$$

il n'y a plus de contradiction, si on représente un conducteur rectiligne, non plus par une droite au sens mathématique, mais par un cylindre de petite section.

(un problème analogue se pose pour le champ électrostatique créé par une charge ponctuelle, si on calcule son flux à travers une sphère entourant la charge. voir exercices d' électrostatique).