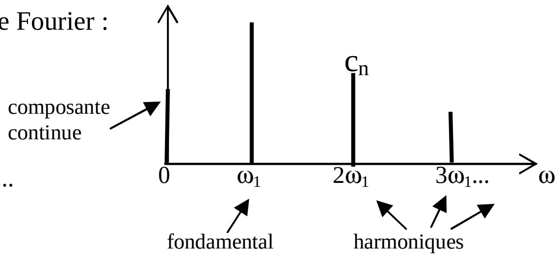
filtrage d'une tension créneau par un circuit RLC

1. rappels sur les séries de Fourier
1.1 décomposition en séries de Fourier

une fonction périodique f(t) peut être décomposée en série de Fourier :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos(\omega t) + a_2\cos(2\omega t) + ... + a_n\cos(n\omega t) + ...$$
$$+ b_1\sin(\omega t) + b_2\sin(2\omega t) + ... + b_n\sin(n\omega t) + ...$$

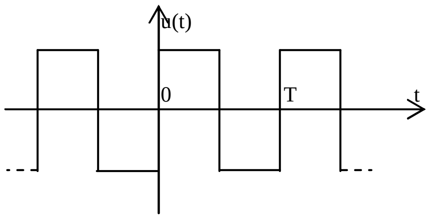
ou $f(t) = c_0 + ... + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\,\left(\cos\varphi_n\cos(n\omega t) - \sin\varphi_n\sin(n\omega t)\right) + ...$



soit enfin $\boxed{f(t) = c_0 + ... + c_n\left(\cos(n\omega t + \varphi_n)\right) + ...}$

c_n et φ_n sont respectivement *l'amplitude et la phase de l'harmonique n;* c_0 est la *composante continue*

exemple: pour une tension créneau d'amplitude U et de période T:



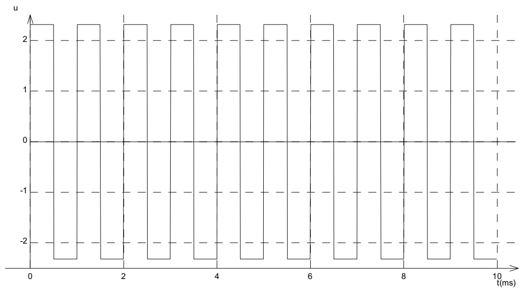
la valeur moyenne est nulle et la fonction est impaire :
donc : $c_0 = a_0/2 = 0$ et $a_n = 0$

on calcule $b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} U\sin(n\omega_0 t)dt = b_n = \frac{8U}{2n\pi}$ si n impair, et 0 si n pair soit $\boxed{u(t) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{4U}{(2p+1)\pi}\sin(2p+1)\omega_0 t}$

on se propose dans ce qui suit, de "filtrer ce signal" en utilisant la bande passante d'un circuit RLC convenablement choisi, de façon à pouvoir sélectionner indépendamment chaque harmonique
on réalise ainsi un filtrage sélectif.

1.2 vérification du calcul précédent sur un exemple

construction d'une fonction créneau : ouvrir REGRESSI -> fichier -> nouveau -> simulation
(cliquer sur l'icône "$\pi/2$" pour travailler en radians)



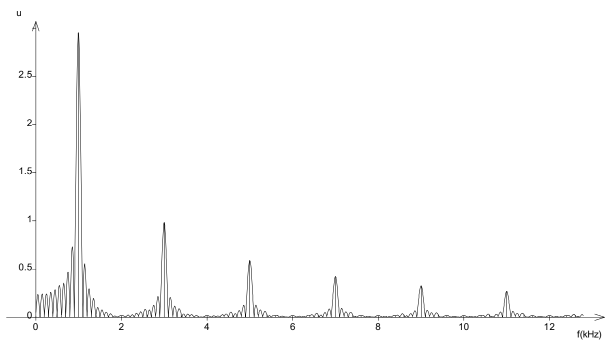
dans l'onglet "expressions", rentrer :
variable de contrôle : **t** qui varie de **0** à **0.01 s**

prendre **1024 points** de calcul

écrire :**u=4.00*sign(sin(2*pi*1000*t))**

cliquer sur l'icône "graphe" pour tracer u(t)

on obtient alors une fonction créneau de fréquence 1khz sur 10 périodes, d'amplitude 4 volts :



cliquer sur l'icône "spectre" (transformée de Fourier rapide, algorithme qui redonne la décomposition en série de Fourier pour les fonctions périodiques)

cliquer sur l'icône "options",

choisir: superposition -> enveloppe
afficher au moins les 6 premiers maxima principaux;

on obtient alors le spectre de la fonction précédente, qui redonne les amplitudes des termes de la série de Fourier, si on fait abstraction du "bruit" généré par l'algorithme de calcul.

avec le réticule, relever les valeurs des amplitudes des harmoniques et la fréquence, et remplir le tableau suivant (pour U = 4,0 V)

harmonique	**1**(fondamental)	**3**	**5**	**7**	**9**
fréquence harmonique (Hz)					
amplitude mesurée (V)					
amplitude calculée 4U/nπ					

conclure, compte-tenu d'une certaine tolérance, due au mode de calcul et à la précision de la mesure sur l'écran.

2. analyse au moyen d'un circuit RLC

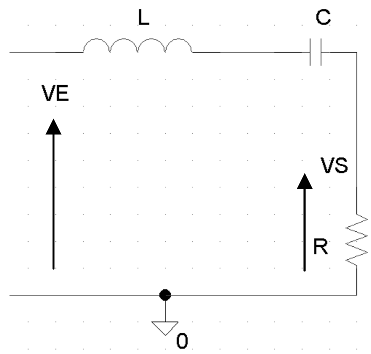
2.1 rappel sur la résonance

lorsqu'on relève la tension aux bornes d'un dipole RLC série alimenté par une tension sinusoïdale de fréquence f (et donc de pulsation ω) on peut calculer la fonction de transfert :

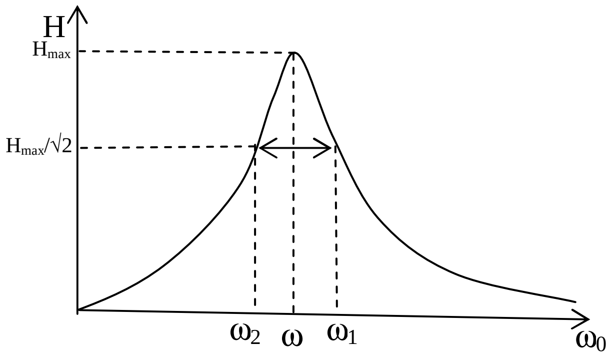
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{vs}}{\underline{ve}} = \frac{R}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} = \frac{1}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = L\omega_0 / R \;=\; 1/RC\omega_0$

soit $$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}}$$

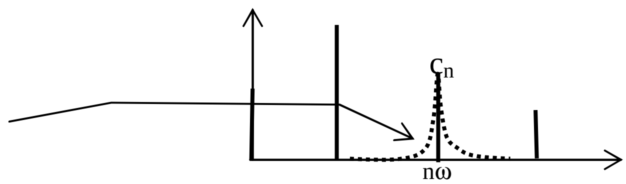


la courbe de résonance $|\underline{H}| = f(\omega)$ est donc identique à celle obtenue en traçant $|\underline{H}| = f(\omega_0)$, ce qui revient à faire varier la fréquence de résonance du circuit en maintenant la fréquence du générateur fixe. On a encore un maximum de courant (donc de tension aux bornes de la résistance lorsque la fréquence de résonance du circuit coïncide avec la fréquence du générateur.



un circuit présentant un facteur de qualité Q très élevé sera donc très "sélectif", et si le spectre de la tension d'entrée n'est plus constitué d'une seule "raie" (signal purement sinusoïdal), mais de plusieurs harmoniques, le circuit entrera en résonance pour chaque harmonique et on pourra reconstituer ainsi le spectre du signal d'entrée

fonction de transfert du circuit RLC

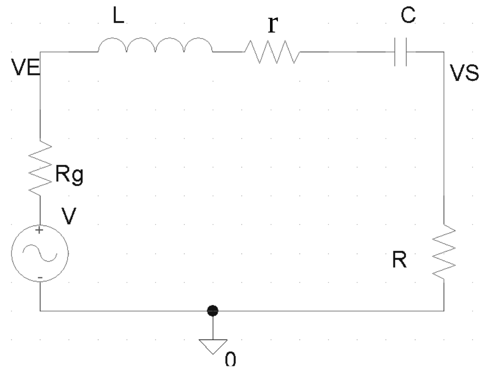


pour modifier ω_0 il suffit de faire varier la capacité ou l'inductance;

c'est le principe simplifié de l'**analyseur de spectre analogique**. Il faudrait une bande passante nulle, et un facteur de qualité infini, si on voulait analyser le signal de manière idéale.

2.2 tracé de la courbe de résonance en faisant varier ω_0

rappel: la fonction de transfert du circuit représenté ci-contre est (voir TP RLC-résonance) :



$$\underline{H}'(j\omega) = \frac{\underline{vs}}{\underline{ve}} = \frac{R}{(R + R_{bobine}) + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$$

$$= (\frac{R}{R + R_{bobine}})\frac{R + R_{bobine}}{(R + R_{bobine}) + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} = H_0 \underline{H}(\omega)$$

alimenter le circuit avec une tension sinusoïdale de fréquence fixe 1kHz d'amplitude environ 4 V, L=1mH
et faire varier la capacité C de 200 pF à 0,5 µF en relevant Ve et Vs

remplir un tableau sous REGRESSI et construire la fonction H = Vs/Ve
(ou télécharger le fichier "manip_circuit_RLC_filtrage_sinusoïde_Ve_Vs.rw3

C	Ve	Vs	H	fres

-tracer la courbe H = f(C) qu'observez vous ?

-construire la fonction "frésonance" : fres = $\omega_0 / 2\pi = 1/\left(2\pi\sqrt{LC}\right)$ et tracer la courbe H = f(fres)

-conclure sur l'importance du facteur de qualité pour pouvoir "isoler" une fréquence donnée;

2.3 tracé de la réponse du circuit à une tension créneau

alimenter maintenant le circuit avec une tension créneau de rapport cyclique égal à 1, de fréquence fixe 1kHz et d'amplitude environ 4 V

faire varier la capacité C de 200 pF à 0,5 µF en relevant Ve et Vs

remplir un tableau sous REGRESSI et construire la fonction H = Vs/Ve
(ou télécharger le fichier "manip_circuit_RLC_filtrage_creneau_Ve_Vs.rw3)

C	Ve	Vs	H	fres

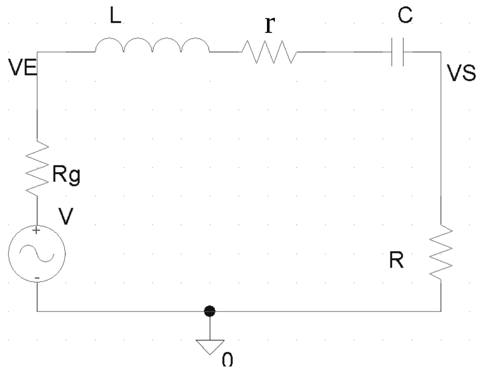
-tracer la courbe H = f(C) qu'observez vous ?

-construire la fonction "frésonance" : fres = $\omega_0 / 2\pi = 1/\left(2\pi\sqrt{LC}\right)$ et tracer la courbe H = f(fres)

-que représenterait cette courbe si le facteur de qualité était très élevé?

2.4 simulation au moyen de regressi

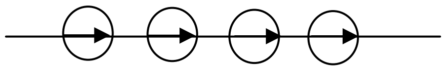
cherchons maintenant à reconstituer la tension qui serait mesurée aux bornes de la résistance, en appliquant une tension créneau à un circuit RLC série ;
la fonction de transfert est :



$$\underline{H}'(j\omega) = \frac{\underline{vs}}{\underline{ve}} = \frac{R}{(R+R_{bobine}) + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$$

$$= \left(\frac{R}{R+R_{bobine}}\right)\frac{R+R_{bobine}}{(R+R_{bobine}) + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} = H_0\,\underline{H}(\omega)$$

décomposer la tension créneau en série de Fourier revient à dire qu'on a un ensemble de générateurs de pulsations respectives ω, 3ω, 5ω, 7ω, ...et de tensions efficaces U_1, U_3, U_5, etc..placés en série.



Pour chaque générateur, nous pouvons calculer la tension complexe aux bornes de la résistance, par exemple $\underline{v_{s3}} = H_0 \frac{R+R_{bobine}}{(R+R_{bobine}) + j(L3\omega - \frac{1}{C3\omega})}\underline{v_{e3}}$ et sa valeur efficace $U_{s3} = H_0 \frac{R+R_{bobine}}{\sqrt{(R+R_{bobine})^2 + (L3\omega - \frac{1}{C3\omega})^2}} U_{e3}$

puis la valeur efficace de la tension de sortie non sinusoïdale : $U_S = \sqrt{U_{s1}^2 + U_{s3}^2 + U_{s5}^2 + ...}$

pour tracer la réponse du circuit lorsque la fréquence du signal d'entrée est fixe, on fait varier la capacité, puis on exprime frésonance (fres) en fonction de C
entrons ces expressions dans REGRESSI, en prenant C comme variable de contrôle:

utilisation de REGRESSI
ouvrir fichier -> nouveau -> simulation
dans l'onglet "expressions", rentrer :

variable de contrôle : **C** qui varie de **2.0E-10** à **5.0E-7 F**
prendre **2048 points** de calcul (si l'ordinateur n'est pas trop lent...)

entrer ensuite les expressions suivantes, (ou ouvrir le fichier proposé en téléchargement) :

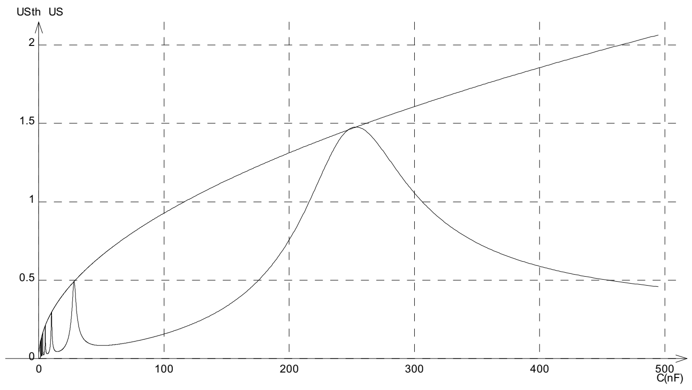
paramètres du circuit :	R=50
	r=50
	L=0.1
	f=1000
	omega=2*pi*f
	H0=(R/(R+r)
	U=4.0
générateurs équivalents	U1=U*4/pi
	U3=U*4/(3*pi)
	U5=U*4/(5*pi)
	U7=U*4/(7*pi)
	U9=U*4/(9*pi)
	U11=U*4/(11*pi)
	U13=U*4/(13*pi)
fonctions de transfert	H1=H0*(R+r)/((R+r)^2+(L*omega-1/(C*omega))^2)^0.5
	H3=H0*(R+r)/((R+r)^2+(L*3*omega-1/(C*3*omega))^2)^0.5
	H5=H0*(R+r)/((R+r)^2+(L*5*omega-1/(C*5*omega))^2)^0.5
	H7=H0*(R+r)/((R+r)^2+(L*7*omega-1/(C*7*omega))^2)^0.5
	H9=H0*(R+r)/((R+r)^2+(L*9*omega-1/(C*9*omega))^2)^0.5
	H11=H0*(R+r)/((R+r)^2+(L*11*omega-1/(C*11*omega))^2)^0.5
	H13=H0*(R+r)/((R+r)^2+(L*13*omega-1/(C*13*omega))^2)^0.5
amplitudes des harmoniques	US1=H1*U1
	US3=H3*U3
	US5=H5*U5
	US7=H7*U7
	US9=H9*U9
	US11=H11*U11
	US13=H13*U13
valeur efficace en sortie	US=(US1^2+US3^2+US5^2+US7^2+US9^2+US11^2+US13^2)^0.5
expression de frésonance	fres=1/(2*pi*(L*C)^0.5)
enveloppe théorique	USth=4000*U*H0/(fres*pi)

exploitation des tracés :

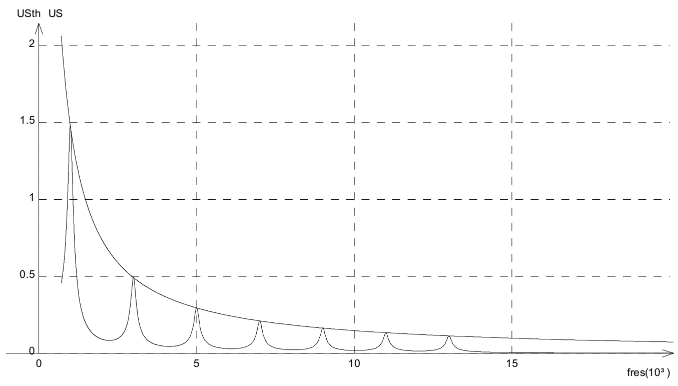
en traçant le graphe US = f(C) on obtient la réponse en fonction de C :

ce tracé peut être amélioré en passant en abscisse logarithmique

on observe un maximum lorsque la fréquence de résonance du circuit coïncide avec la fréquence d'un harmonique

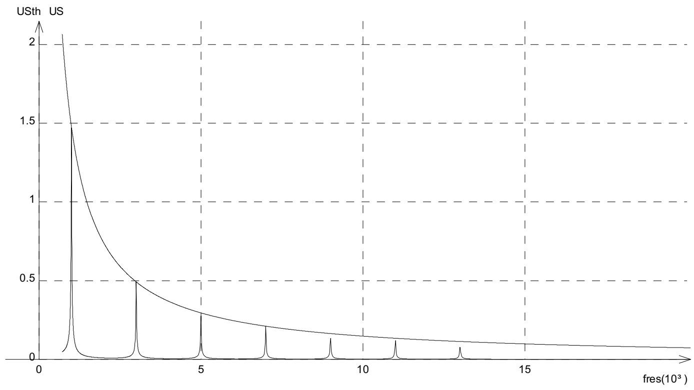


tracer maintenant les graphes US et USth en fonction de la fréquence de résonance associée à chaque valeur de la capacité :
on obtient :



cette fois on a la réponse du circuit dans l'espace des fréquences; la valeur des maxima coïncide pratiquement avec les valeurs théoriques, mais les pics sont larges.

rendons le circuit plus sélectif en prenant
R = r = 5 Ω
les tracés précédents deviennent :



dans ce cas, en faisant varier C, on déplace une "fenêtre" beaucoup plus étroite dans l'espace des fréquences, et on réalise un dispositif permettant de reconstituer le spectre du signal d'entrée.

c'est le principe de l'analyseur de spectre.