

PENDULES COUPLES

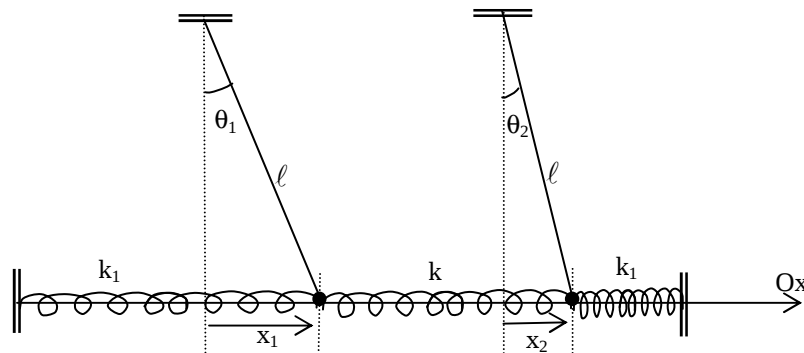
spectre de Fourier d'un mouvement périodique complexe

1. introduction

une fonction périodique vérifiant certaines conditions, presque toujours réalisées en physique (absence d'un nombre infini de discontinuités, par exemple) peut être décomposée en une somme de fonctions sinusoïdales, appelée série de Fourier. On se propose dans le cas relativement simple d'un oscillateur présentant deux modes propres de vibration, de mettre en évidence qu'un mouvement complexe en apparence peut être considéré comme la superposition de mouvements harmoniques (sinusoïdaux) appelés "modes propres". Différents types de mouvements seront enregistrés, et on procèdera à l'analyse spectrale pour obtenir le spectre en fréquence de ces mouvements.

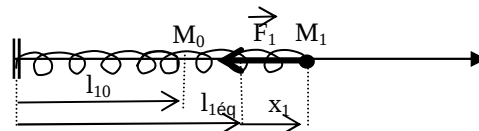
1.1 description et mise en équation du système

deux pendules constitués chacun d'une masse m assimilée à une masse ponctuelle... (qu'en pensez-vous?) et oscillant sous l'effet de la pesanteur et de deux ressorts, sont reliés par un troisième ressort qui assure le couplage entre les deux oscillateurs.



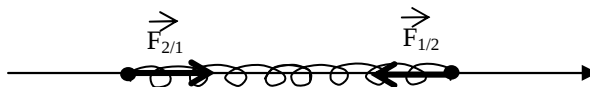
On admettra que les masses se déplacent sensiblement sur un axe horizontal, on appelle x_1 et x_2 les déplacements par rapport aux positions d'équilibre O_1 et O_2 , et on se limitera à l'étude des petits mouvements. On appelle $\bar{T}_1$ et $\bar{T}_2$ les tensions des fils, exprimer $\sin\theta_1$ et $\sin\theta_2$, et montrer que les composantes de ces tensions sur un axe horizontal s'écrivent : $-mg x_1 / L$ et $-mg x_2 / L$.

La force exercée par l'extrémité d'un ressort qu'on étire a pour expression : $\vec{F} = -k_1 \vec{M_0 M_1}$
ce qui donne en projection sur Ox : $\vec{F}_1 = -k_1 (l_{1eq} + x_1 - l_{10}) \vec{u}_x$ si l_{1eq} et l_{10} désignent longueur à l'équilibre et longueur à vide du premier ressort.



Dans le cas du ressort central, les deux extrémités sont mobiles. Vérifier que cette fois on a :

$$F_{1/2} = -F_{2/1} = -k (l_{eq} + x_2 - x_1 - l_0)$$



écrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée à la première masse : $m \ddot{x}_1 = ?$

écrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée à la seconde masse : $m \ddot{x}_2 = ?$

écrire ces mêmes relations à l'équilibre : on obtient deux relations entre k_1 , k , l_{1eq} ou l_{2eq} et l_0
en reportant au dessus, retrouver les équations finales :

$m \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k (x_1 - x_2) - \frac{mg}{L} x_1$	pour la première masse et
$m \ddot{x}_2 = -k_1 x_2 - k (x_2 - x_1) - \frac{mg}{L} x_2$	pour la seconde masse

1.2 résolution des équations

faire la somme et la différence des équations précédentes, de façon à faire apparaître les nouvelles variables $Y = x_1 + x_2$ et $Z = x_1 - x_2$ dans deux équations différentielles indépendantes.

En supposant les vitesse initiales nulles, écrire les solutions; on appellera Y_0 et Z_0 les amplitudes, et ω' et ω'' , les pulsations correspondantes.

Ecrire enfin les solutions en x_1 et x_2 , et montrer qu'elles s'écrivent

$x_1 = x'_0 \cos \omega' t + x''_0 \cos \omega'' t$ et $x_2 = x'_0 \cos \omega' t - x''_0 \cos \omega'' t$ où x'_0 et x''_0 sont des constantes à déterminer suivant les valeurs des conditions initiales :

premier cas : $x_1(t=0) = x_2(t=0) = a$

second cas : $x_1(t=0) = -x_2(t=0) = -a$

troisième cas : $x_1(t=0) = 0, x_2(t=0) = a$

calculer numériquement ω' et ω'' ,

montrer que le troisième cas fait apparaître les pulsations $\omega_3 = \frac{\omega' + \omega''}{2}$ et $\omega_4 = \frac{\omega' - \omega''}{2}$

2. expérimentation :

2.1 principe du montage

on donne les valeurs des constantes de raideur et de la masse : $k = 4,8 \text{ N.m}^{-1}$ $k_1 = 8,5 \text{ N.m}^{-1}$ $m = 265 \text{ g}$

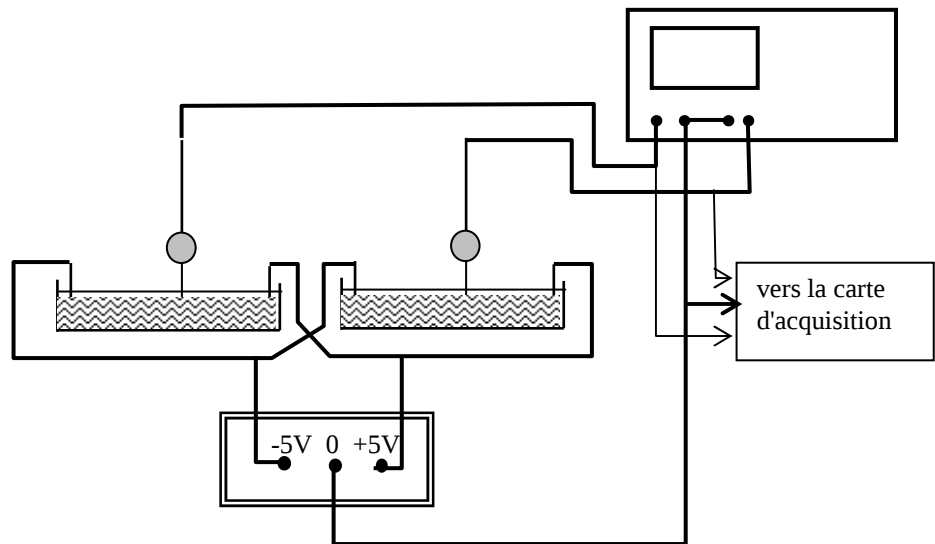
La position des masses est enregistrée au moyen d'un "capteur de déplacement" constitué d'un fil trempant dans de l'eau,

les cuves sont alimentées en parallèle par une différence de potentiel de 10 V avec point milieu:

boîtier d'acquisition :
masse, voie 1, voie 2

on visualisera également les tensions sur un oscilloscope.

paramétrage de l'acquisition :
256 points sur 5s,
ou 10s pour le troisième cas; déclenchement au clavier, ou avec la souris.



2.2 mesures

pour chaque type de mouvement, faire plusieurs essais, et enregistrer les courbes les plus régulières. l'amplitude initiale sera de quelques centimètres, et on lâchera les masses sans vitesse initiale.

premier cas : $x_1(t=0) = x_2(t=0)$ (élongations initiales égales)

second cas : $x_1(t=0) = -x_2(t=0)$ (élongations initiales opposées)

troisième cas : $x_1(t=0) = 0, x_2(t=0) \neq 0$ (on écarte une seule masse, en tenant l'autre, et on lâche)

les mouvements des deux masses devant être identiques à un terme de phase près, on travaillera sur une seule courbe:

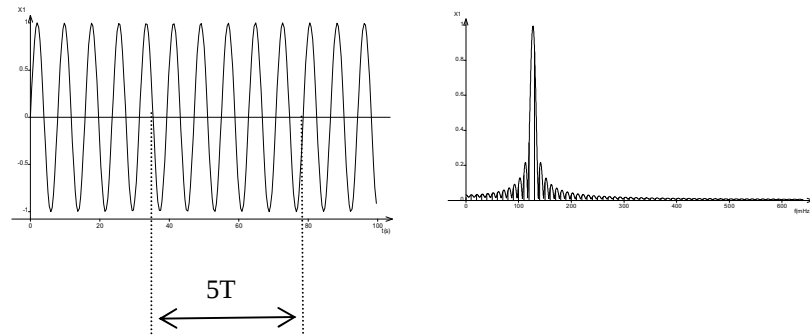
- effectuer la mesure de la période au moyen du curseur, en mesurant l'intervalle de temps correspondant à plusieurs périodes, et en déduire la pulsation; comparer avec les valeurs calculées précédemment

- tracer le spectre de Fourier en utilisant l'icône FFT (Fast Fourier Transform), qui permet pratiquement d'obtenir les coefficients des séries de Fourier lorsque le mouvement est périodique et la fenêtre d'analyse est un nombre entier de périodes.

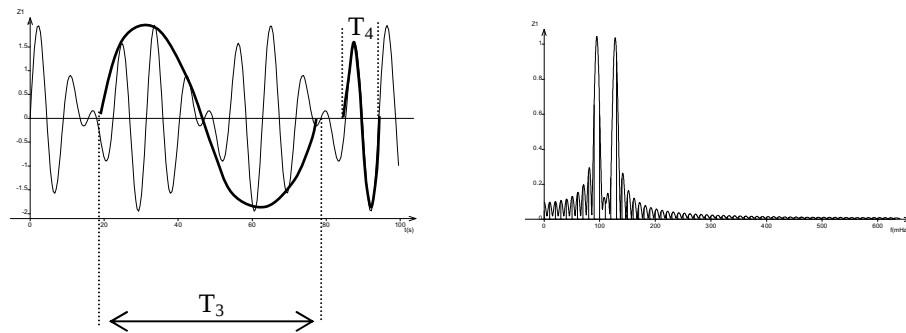
afin de rendre cette courbe plus lisible, choisir: ->options, ->64 harmoniques, ->enveloppe
Ceci permet d'obtenir une ou plusieurs "raies" dont on mesurera la fréquence en abscisse.

exemples :

premier ou second cas :



troisième cas :



le mouvement est plus complexe, il y a cette fois deux périodes et deux fréquences à mesurer (voir partie théorique)

3. exploitation des mesures :

compléter le tableau suivant (ou le document-réponse)

valeurs calculées	T' =	T'' =	f' =	f'' =	ω' =	ω'' =
-------------------	------	-------	------	-------	-------------	--------------

valeurs mesurées :

premier cas		-----		-----		-----
second cas	-----		-----		-----	
troisième cas	T ₃ =	T ₄ =	f ₃ =	f ₄ =	ω_3 =	ω_4 =

pour le troisième cas, établir la relation entre les pulsations mesurées, et les pulsations ω' et ω'' . Ceci est-il vérifié numériquement ? En quoi le troisième spectre caractérise-t-il bien le troisième mouvement ?

4. complément : coefficient de couplage

Dans le cas où on peut négliger le terme du aux tensions des fils, montrer que l'on peut écrire

$$\omega' = \omega_1 \sqrt{1 - C} \quad \omega'' = \omega_1 \sqrt{1 + C}$$

$$\text{avec } \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1 + k}{m}} \text{ et } C \text{ coefficient de couplage}$$

Retrouver la signification physique de ω_1 en considérant le mouvement d'une masse lorsque l'autre est maintenue immobile, et interpréter l'expression de C.