# utilisation des développements en série limité; utilisation d'un tableur
# etude de la trajectoire de Pluton par la méthode d'Euler

**1.méthode d'Euler**
**1.1 principe de la méthode** (voir TP0)

rappel : toute fonction f(t) infiniment dérivable dans son domaine de définition peut s'écrire sous la forme d'un développement de Taylor ; en discrétisant le temps et en choisissant un pas de calcul $\tau$ suffisamment petit, on pourra limiter le développement à l'ordre 2 : $f(t_n+\tau)=f(t_n)+\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{t_n}\tau+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)_{t_n}\tau^2$ , ou même à l'ordre 1.

**1.2 détermination d'une équation horaire**

Supposons connues les conditions initiales d'un mouvement dont l'équation horaire à déterminer est z = f(t), et choisissons une incrémentation du temps $\Delta t = (t_1 - t_0)= (t_2 - t_1)= \dots = (t_n - t_{n-1}) = \tau$ suffisamment petite pour pouvoir négliger les termes d'ordre supérieur à l'ordre 2 :
ceci revient ici à dire que l'accélération est un vecteur constant, sur un petit intervalle de temps $\tau$
partant de $t_o$= 0, on écrira à $t_1 = \tau$ : $v_{x1} = v_{xo} + a_{xo}.\tau$ et $v_{y1} = v_{yo} + a_{yo}.\tau$

puis $x_1 = x_o + v_{xo}.\tau + \frac{1}{2}.a_{xo}.\tau^2$ et $y_1 = y_o + v_{yo}.\tau + \frac{1}{2}.a_{yo}.\tau^2$

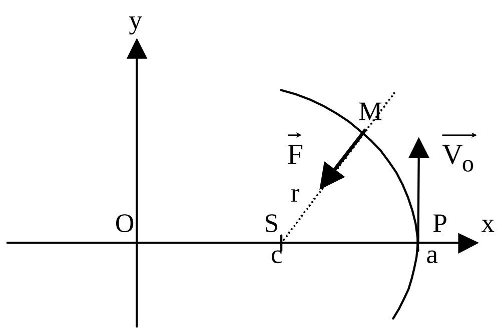
en répétant ces calculs de proche en proche avec le même pas $\tau$, on trouve les valeurs de x et y des coordonnées de position de Pluton aux instants $t_1 = \tau$, $t_2 = 2\tau$, …, $t_n = n\tau$.

les conditions initiales, et les équations de la dynamique permettent ainsi de calculer pas à pas, vitesse et position, puis de recalculer l'accélération; on pourra ainsi remplir un tableau, ligne par ligne, et obtenir toutes l'équation horaire.

**2 étude du mouvement de Pluton**
**2.1 équations du mouvement :**

nous allons simuler le mouvement de Pluton dans le référentiel héliocentrique en utilisant la méthode d'Euler.
choisissons un repère (Ox,Oy) dont le centre O est supposé être le centre de l'ellipse.
on ne tiendra compte que de la force de gravitation exercée par le Soleil.

choisissons à t = 0, le passage de Pluton à son périhélie P de coordonnées $x_o$ = a , $y_o$ = 0, avec une vitesse $\overrightarrow{V_o}$ de coordonnées $V_{xo} = 0$, $V_{yo} = V_o$.




<u>rappels</u> : la loi des aires : la vitesse aréolaire est une constante.

$$\frac{dA}{dt}=\frac{\text{aire de l'ellipse}}{\text{période de révolution}}=\frac{\pi.a.b}{T}$$

où a est le demi grand axe et b le demi petit axe de l'ellipse.

$b^2 = a^2 - c^2$ avec c = a.e. et $b = a.\sqrt{1-e^2}$

et d'après la troisième loi de Képler : $\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{G.M_s}$

<u>Application numérique</u> : a = $5{,}90.10^{12}$ m ; e = 0,246 étant l'excentricité de Pluton ;
G = $6{,}67.10^{-11}$ SI ; $M_s = 1{,}99.10^{30}$ kg pour la masse du Soleil et à partir des relations ci-dessus, on trouve $V_o$ = 6,10 km.s$^{-1}$.

D'après la seconde loi de Newton, $m\vec{a}=-mg\vec{u}_r$ , $-g\vec{u}_r$ correspondant au champ de gravitation central orienté vers S.

Retrouver que les composantes de $\vec{a}$ sont : $a_x=-\frac{G.M_s}{r^3}(x-c)$ et $a_y=-\frac{G.M_s}{r^3}y$ avec $r^2 = (x - c)^2 + y^2$.

d'où $\boxed{a_x=-\frac{G.M_s}{((x-c)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.(x-c)}$ et $\boxed{a_y=-\frac{G.M_s}{((x-c)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}y}$ et à t = 0 : $a_{xo}=-\frac{G.Ms}{(a-c)^2}$ et $a_{yo} = 0$.

La méthode d' Euler exposée ci-dessus revient ici à dire que l'accélération est un vecteur constant, sur un petit intervalle de temps égal à $\tau$; à partir de $t_o$= 0, les conditions initiales étant fixées,on calculera $v_{x1}$ , $v_{y1}$ puis $x_1$ et $y_1$ , puis on recalculera les accélérations, et on réitèrera le calcul.

**2.2 utilisation du tableur** (Excel)

ouvrir une feuille de calcul, et garnir les premières lignes de la façon suivante :

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **trajectoire de Pluton par la méthode d'Euler** | | | | | |
| **2** | | | | | | |
| **3** | tau | G | M | ce | a | e |
| **4** | 1,578E7 | 6,67E-11 | 1,99E+30 | 1,45E+12 | 5,90E+12 | 2,46E-01 |

pour pouvoir modifier la valeur d'une constante, ou éviter de retaper sa valeur à chaque fois, donner un nom à la cellule contenant la valeur choisie; exemple pour $\tau$, taper "tau" au lieu de A4 dans le champ figurant au-dessus de la colonne A ; il suffira ensuite de taper « tau » dans les expressions figurant dans les cellules. Procéder de même pour toutes les constantes. (attention,"c", nom réservé dans excel est remplacé par "ce")

-commencer à la ligne 6 de la feuille de calcul pour entrer les lettres représentant les noms des variables,
-remplir la ligne 7 avec les valeurs initiales à t = 0.

-la ligne 8 contiendra les expressions ( à chercher !) qui seront répétées pour toutes les lignes suivantes.

en choisissant tau = 0,5x365,25x24x3600 s ≈ 1,578 E7 s , c'est à dire la moitié d'une année, il faudra réitérer environ 500 fois les calculs pour espérer tracer une ellipse.

les valeurs suivantes doivent apparaitre ligne 8 (ici tau = 1,57788 E7 n'est pas arrondi) :

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **6** | t | x | y | vx | vy | ax | ay |
| **7** | 0 | 5,90E+12 | 0 | 0 | 6100 | -6,74E-06 | 0 |
| **8** | 15778800 | 5,90E+12 | 9,6251E+10 | -1,06E+02 | 6100 | -6,70E-06 | -1,45E-07 |
| **9** | 31557600 | 5,90E+12 | 1,9248E+11 | -2,12E+02 | 6097,71057 | -6,70E-06 | -2,90E-07 |
| **10** | 47336400 | 5,89E+12 | 2,8866E+11 | -3,18E+02 | 6093,13403 | -6,69E-06 | -4,35E-07 |

faire un "copier-coller" de la ligne 8 sur 500 lignes environ : pour ce faire, sélectionner la ligne 8, cliquer sur le coin inférieur droit de la partie sélectionnée (où apparaît un petit carré), et "tirer" vers le bas sur 500 lignes. Le nombre exact importe peu. les cellules sont calculées automatiquement; sinon activer la fonction "calcul".

**2.3 tracé de la trajectoire**
sélectionner les valeurs des colonnes x et y jusqu'aux dernières valeurs numériques
ouvrir un graphique, choisir "nuages de points", choisir le tracé le plus fin , et tracer le graphique sur une feuille annexe.
vérifier que la trajectoire obtenue a bien l'allure d'une ellipse; mais que remarquez vous?
que pensez-vous de la précision de ce tracé ?

-déterminer à partir des valeurs calculées, la durée d'une révolution, comparer avec la valeur connue (247,6 années)
-comment évolue la valeur de a après une révolution ?
montrer qu'en choisissant un pas plus petit (et donc en augmentant le nombre de lignes de calcul), on se rapproche d'avantage des bonnes valeurs.
construire un tableau récapitulatif pour 4 valeurs du pas de calcul, et tracer la durée de révolution en fonction de tau :

| tau (s) | a (demi grand-axe) (m) | écart | T (durée de révolution) (s) |
|---|---|---|---|
| 1,58 E7 | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

**conclusion** :La méthode d'Euler permet de connaître le mouvement ultérieur d'un point connaissant sa position et sa vitesse initiales, à condition de connaître les forces extérieures s'exerçant sur le système. La mécanique classique de Newton possède, de ce fait, un caractère déterministe.