TP champs de vecteurs : support théorique

1) définition intrinsèque du gradient :

$$dV = gr\vec{a}dV.d\vec{l} \quad \text{et} \quad V(B)-V(A) = \int_A^B gr\vec{a}dV.d\vec{l} = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{l}$$

2) relation entre le champ électrostatique et le potentiel V :

$$\vec{E} = -gr\vec{a}dV \quad avec \quad gr\vec{a}dV = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z \ \text{ en cartésiennes}$$

$$gr\vec{a}dV = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z \ \text{ en cylindriques}$$

$$gr\vec{a}dV = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi \ \text{ en sphériques}$$

3) équation des équipotentielles :

les équipotentielles (ou ‘’iso-V’’) sont les courbes d’équation V = cte. C’est donc dans un plan une famille de courbes dépendant d’un paramètre (la valeur du potentiel sur la courbe) et dans l’espace une famille de surfaces.

4) équation des lignes de champ :

un élément $d\vec{l}$ appartenant à une ligne de champ vérifie l’équation $d\vec{l} \wedge \vec{E} = 0$ puisque par définition le champ $\vec{E}$ y est tangent en tout point.
on en déduit facilement : $\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$ en cartésiennes et $\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\vartheta}{E_\theta}$ en polaires.

l’intégration des équations obtenues permet d’obtenir les équations des lignes de champ.

5) potentiel d’un dipole (ou doublet) électrostatique :

celui-ci s’obtient en faisant la somme des potentiels crées par chaque charge, compte tenu du fait que la distance a entre les charges est un infiniment petit d’ordre 1 devant la distance OM = r. On fera donc un développement limité pour obtenir l’expression donnée.