topographie, propriétés de symétrie, et tracé de quelques cartes de champs électrostatiques
relation entre champ et potentiel électrostatique

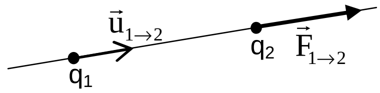
les premiers tracés se feront "à la main"; l'ordinateur ne sera utilisé que lorsque c'est indiqué

1.1 rappels : potentiel et champ électrostatique pour une charge ponctuelle.

l'interaction électromagnétique entre deux charges ponctuelles q et q_2 se traduit par une force $\vec{F}_{1\to 2} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}{}^2}\vec{u}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$

on l'interprète, en disant que la charge q_1 crée au niveau de la charge q_2

un champ $\boxed{\vec{E}(M_2) = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}{}^2}\vec{u}_{1\to 2}}$ exprimé en $V.m^{-1}$ et on définit le potentiel



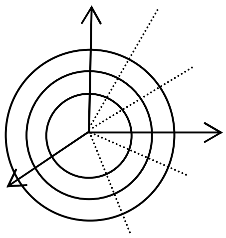
électrostatique, exprimé en Volts, par la relation $dV = -\vec{E}.d\vec{\ell}$,

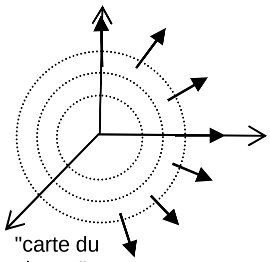
soit entre deux points A et B quelconques : $V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E}.d\vec{\ell}$ la différence de potentiel est la <u>circulation</u> du champ électrique et

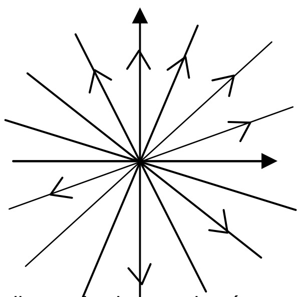
pour une charge ponctuelle : $\boxed{V(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$, le potentiel étant supposé nul à l'infini.

on rappelle enfin que les lignes de champ (courbes tangentes en tout point au vecteur champ électrique) sont orthogonales en tout point aux surfaces ou aux courbes équipotentielles (définies par V = cte). Elles caractérisent la direction et le sens du champ électrique.

<u>exemple d'une charge ponctuelle q placée à l'origine d'un repère</u> : V(r) = cte impose r=cte, les surfaces équipotentielles sont des sphères centrées en O et le champ électrique est porté par le vecteur unitaire radial $\vec{u}_r$,donc orthogonal en tout point aux équipotentielles.


équipotentielles
(sphères)


"carte du
champ"


lignes de champ orientées

1.2. tracés dans le cas de deux charges ponctuelles de même signe

on utilisera le document-réponse (papier millimétré) **qui sera rendu à la fin de la séance**

- elles sont placées sur l'axe Ox, symétriquement par rapport à Oy à 2 cm de O; établir les propriétés de symétrie de cet ensemble de charges, et rappeler comment se situe le champ électrique dans un plan de symétrie des charges.Que vaut le champ au point O ?

calculer numériquement et représenter le champ aux points A, B, C, D, E <u>en respectant l'échelle</u>; commenter le tracé.
1cm = 1cm   20 $V.m^{-1}$ = 1cm
OA = 3cm OB = OC = 2cm et q = 10^{-12}C $1/4\pi\varepsilon_0$ = $9 10^{9}$ $m.F^{-1}$

1.3. cas de deux charges ponctuelles de signes opposés

on utilisera encore le document-réponse (papier millimétré) **qui sera rendu à la fin de la séance**

cette fois on considère une charge -q et une charge +q avec q>0
établir les propriétés de symétrie de cet ensemble de charges, et rappeler comment se situe le champ électrique dans un plan de symétrie et dans un plan d'<u>antisymétrie</u> des charges.Que peut-on dire du champ au point O ?

- calculer et représenter le champ <u>à l'échelle</u>, aux points A, B, C, D, E définis précédemment. Commenter le tracé.

1.4. utilisation d'un logiciel pour tracer quelques lignes de champ et équipotentielles.

les équipotentielles et les lignes de champ sont tracées maintenant au moyen d'un logiciel qui utilise diverses méthodes d'analyse numérique (résolution numérique de l'équation de Laplace qui sera vue plus tard, par exemple).

le tracé des lignes de champ et des équipotentielles obeit aux caractéristiques suivantes:

- près d'une charge, le potentiel qui varie en 1/r tend vers l'infini, et le champ en 1/r² également. L'influence de l'autre charge devient alors négligeable, et *tout se passe comme si elle était seule*.
- loin de l'origine, les deux charges semblent confondues en une charge unique 2q pour les charges de même signe, ou bien une charge nulle dans le cas de deux charges opposées.
- les lignes de champ et les équipotentielles forment *deux réseaux de courbes orthogonales* en tout point.

vous allez essayer de reconnaitre ces caractéristiques dans les tracés suivants:

1.4.1 ouvrir la page internet http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Elec/Champs/lignes_champE.html

accessible plus simplement par : http://rascol.net ou http://rmck.free.fr/ rubrique -> travaux pratiques

placer d'abord une seule charge, tracer quelques lignes de champ et équipotentielles et observer simplement l'allure

placer maintenant deux charges de mêmes signes, tracer quelques lignes de champ et équipotentielles, imprimer la feuille (copie d'écran) et noter sur la feuille rendue les caractéristiques générales des tracés (symétries, antisymétries etc..)

1.4.2 placer enfin deux charges de signes opposés, tracer quelques lignes de champ et équipotentielles, imprimer la feuille et noter encore les caractéristiques générales des tracés,

1.4.3 placer maintenant trois ou quatre charges de signes et valeurs quelconques, et reconnaître les caractéristiques générales des lignes de champ électrique et des équipotentielles

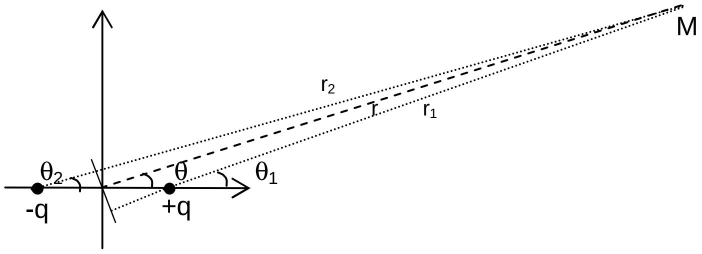
rendre les trois feuilles annotées à la fin de la séance ; si vous maîtrisez un logiciel de dessin ou de traitement de texte, vous pouvez regrouper ces tracés et les commentaires sur une seule feuille.

2. cas de deux charges opposées, vues de loin :"doublet électrostatique"

Lorsque dans une distribution de charges le barycentre des charges positives ne coïncide pas avec le barycentre des charges négatives, le potentiel et le champ crées présentent un caractère dipolaire. C'est par exemple le cas pour certaines molécules dont le moment dipolaire n'est pas nul en raison de la différence d'électronégativité des atomes qui les composent (ex:H_2O, HCl). Nous allons ici mettre en évidence les principales caractéristiques d'un champ dipolaire, en étudiant tout d'abord ce champ loin d'un ensemble de deux charges opposées (doublet)

2.1 étude du potentiel :

un doublet (ou dipôle) électrostatique est constitué d'un ensemble de deux charges opposées -q et +q, séparées de la distance 2a. Le moment dipolaire est $\vec{p} = 2aq\vec{u}$ où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire, dirigé de la charge -q vers la charge +q.



On se place cette fois dans le plan xOy en coordonnées polaires: M, placé très loin du doublet, est repéré par r et θ ; les trois droites en pointillé étant quasiment parallèles, justifier qu'on peut écrire au premier ordre près en a/r :

$r_1 = r - a\cos\theta$ et $r_2 = r + a\cos\theta$, en déduire l'expression du potentiel $V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r - a\cos\theta} - \dfrac{1}{r + a\cos\theta}\right)$

écrire V sous forme d'un développement de puissances de $\dfrac{a\cos\theta}{r}$ et montrer que loin du doublet, on a $V = \dfrac{2aq\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

2.2 tracé des équipotentielles:

les équipotentielles (ou ‘’iso-V’’) sont les courbes d’équation $V = cte = V_0$. C’est dans un plan une famille de courbes dépendant d’un paramètre (la valeur du potentiel sur la courbe) et dans l’espace une famille de surfaces obtenues par rotation des courbes autour de l'axe portant les charges.

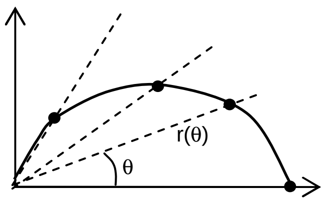
sur une équipotentielle : $V = \frac{2aq\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = V_0$ En posant $V_0 = \frac{2aq}{4\pi\varepsilon_0 {r_0}^2}$, il vient $\frac{2aq\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{2aq}{4\pi\varepsilon_0 {r_0}^2}$ soit $r^2 = r_0^2 \cos\theta$

qui est l'équation en polaire des équipotentielles, avec r_0 comme paramètre.
vous allez les tracer en portant dans la direction θ la distance r, pour plusieurs valeurs de r_0 (par exemple 1, 2 et 3 cm):

remplir le tableau :

θ	0	π/6	π/4	π/3	π/2
$\sqrt{\cos\theta}$					
$r_1=1.\sqrt{\cos\theta}$					
$r_2=2.\sqrt{\cos\theta}$					
$r_3=3.\sqrt{\cos\theta}$					

Tracer alors le diagramme polaire $r_i = f(\theta)$ donnant la forme des équipotentielles, pour les trois valeurs arbitraires de r_0 correspondant à 3 valeurs du potentiel.
Préciser en particulier "l'équipotentielle zéro".
comparer avec le tracé obtenu précédemment, et vérifier qu'on retrouve la même allure lorsqu'on se trouve loin du doublet.



(dans l'espace, la figure serait obtenue en faisant une rotation autour de l'axe du doublet)

2.3 utilisation du logiciel :

placer maintenant deux charges opposées très près l'une de l'autre, et tracer les équipotentielles; comparer avec ce que vous venez d'obtenir, et commenter ce qui se passe au voisinage des charges : les expressions précédentes sont-elles encore valables?

2.4 expression et lignes de champ du champ électrique:

Le champ électrique est relié au potentiel par la relation locale :

$\vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}}V$ avec $\vec{\mathrm{grad}}V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$ en cartésiennes $\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$ en cylindriques,

et $\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$ en sphériques

Le potentiel ne dépend ici que des variables r et θ (invariance du système de charges par rotation autour de l'axe du doublet),

on utilisera donc l'expression : $\vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta$

Calculer à partir de l'expression de V ci-dessus, les expressions du champ $\vec{E}$ loin du dipole.

2.5 tracé des lignes de champ :

en utilisant la propriété que les lignes de champ sont orthogonales en tout point aux équipotentielles, superposer les lignes de champ sur la figure tracée au 2.2 , et vérifier la cohérence avec les expressions obtenues ci-dessus et les propriétés de symétrie (en particulier sur les axes de coordonnées)

2.5 utilisation du logiciel

utiliser à nouveau le logiciel tracer maintenant les lignes de champ, imprimer, compléter (sens, plans de symétrie et d'antisymétrie), puis commenter le tracé obtenu.