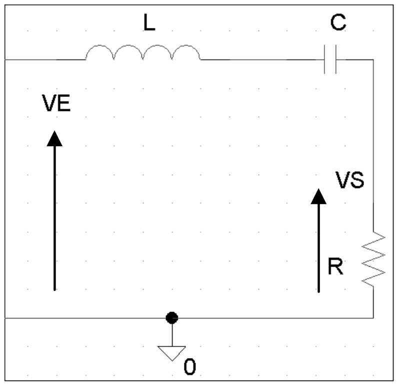
étude de la résonance en courant du circuit RLC série; comparaison avec la résonance en tension aux bornes du condensateur; filtrage d'une tension créneau.

1. rappels théoriques

1.1 résonance en courant (en tension aux bornes de R)

exprimons en régime forcé sinusoïdal la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ pour le circuit suivant :



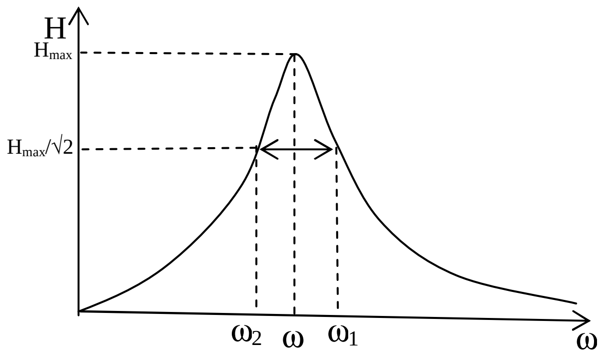
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{vs}}{\underline{ve}} = \frac{R}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} = \frac{jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

posons $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\sigma = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$

(ou encore $2\sigma\omega_0 = \frac{R}{L}$) et enfin $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

montrer que $\underline{H}(j\omega)$ se met sous la forme : $\boxed{\frac{2j\sigma x}{1 - x^2 + 2j\sigma x}}$

l'étude du module de cette fonction donne l'allure suivante :



<u>étude de la phase</u> :

ω	0	ω_0	∞
phase	?	?	?

tracer l'allure de φ (ω)

<u>bande passante à -3 dB :</u> retrouver que les valeurs de la pulsation qui donnent $|\underline{H}| = \frac{|\underline{H}|_{max}}{\sqrt{2}}$ sont données par :

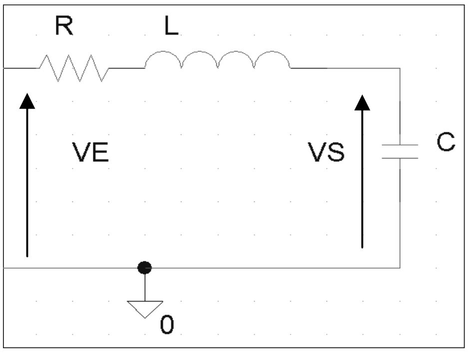
$\omega_1 = \omega_0(\sqrt{1+\sigma^2} + \sigma)$ et $\omega_2 = \omega_0(\sqrt{1+\sigma^2} - \sigma)$ on remarque que $\boxed{\omega_1\omega_2 = \omega_0^2}$

on en déduit la "bande passante" : $\boxed{\omega_1 - \omega_2 = 2\sigma\omega_0}$ ou encore : $\boxed{\frac{\omega_0}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{1}{2\sigma} = Q_0}$

Q_0 est le facteur de qualité (ou coeff. de surtension du circuit) (Q_0 s'écrit aussi : $L\omega_0 / R$ ou $1/RC\omega_0$)

- lorsque le facteur de qualité est élevé (ou le facteur d'amortissement faible), les pulsations ω_1 et ω_2 deviennent : $\omega_1 \approx \omega_0(1+\sigma)$ et $\omega_2 \approx \omega_0(1-\sigma)$ elles sont alors symétriques par rapport à ω_0
- on peut enfin mettre la bande passante sous la forme : $\omega_1 - \omega_2 = 2\sigma\omega_0 = \frac{R}{L} = RC\omega_0^2$

1.2 résonance en tension aux bornes de C



considérons cette fois la tension aux bornes de C :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{vs}}{\underline{ve}} = \frac{1/jC\omega}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$$

on pose encore $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\sigma = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

montrer que $\underline{H}(j\omega)$ se met sous la forme : $\boxed{\frac{1}{1 - x^2 + 2j\sigma x}}$

étude de la phase :

ω	0	ω_0	∞
phase	?	?	?

tracer l'allure de $\varphi(\omega)$

étude de $|\underline{H}|$ le module de $|\underline{H}|$ est maximum si le dénominateur est minimum :

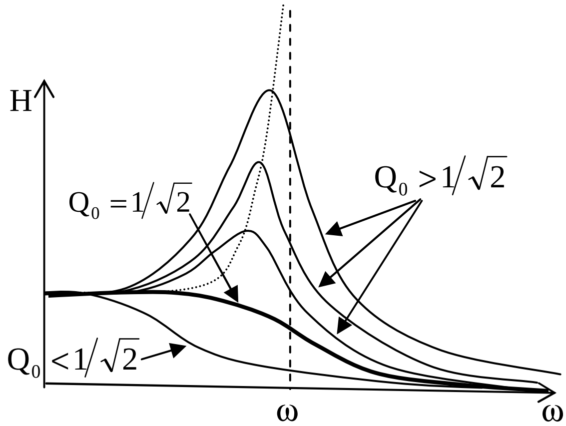
dérivons $(1-x^2)^2 + 4\sigma^2x^2$ par rapport à x : $-2(1-x^2)2x + 8\sigma^2 x = 0$ conduit à $\begin{cases} x = 0 \\ -1 + x^2 + 2\sigma^2 = 0 \end{cases}$

soit $x^2 = 1 - 2\sigma^2$ ou $x = \sqrt{1-2\sigma^2}$

cette solution n'existe que si $1 - 2\sigma^2 \geq 0$ ou $\sigma \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

on a donc résonance lorsque $\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\sigma^2}}$

si $\sigma \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $\boxed{Q_0 = \frac{1}{2\sigma} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707}$



remarques :

- on retrouve les caractéristiques d'un filtre passe-bas : aux basses fréquences, l'impédance du condensateur est prédominante
- la pulsation de résonance s'écrit : $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{R^2C}{2L}}$ pour $R < \sqrt{\frac{2L}{C}}$

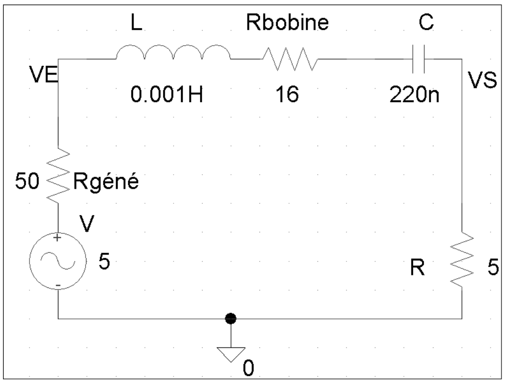
et lorsque σ est faible, la pulsation de résonance tend vers ω_0

- à la résonance, $|\underline{H}|$ s'écrit : $\frac{1}{2\sigma\sqrt{1-\sigma^2}}$, valeur qui tend vers $\frac{1}{2\sigma} = Q_0$ lorsque σ est faible. On peut donc estimer le facteur de surtension par simple lecture du maximum de H sur la courbe.

2.étude pratique

2.1 résonance en courant (en tension aux bornes de R)

on prendra par exemple R = 5Ω, L = 1,0 mH (avec r = 16Ω) et C = 220 nF ;



on réalise le montage décrit au **1.1**, mais il faut tenir compte de la résistance de la bobine :
la tension de sortie est prise aux bornes de la résistance de 5Ω,
et la bobine a une résistance de 16Ω. La fonction de transfert devient :

$$\underline{H}'(j\omega) = \frac{\underline{vs}}{\underline{ve}} = \frac{R}{(R+R_{bobine}) + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$$ ou encore :

$$\left(\frac{R}{R+R_{bobine}}\right)\frac{R+R_{bobine}}{(R+R_{bobine}) + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} = \frac{R}{R+R_{bobine}}\underline{H}$$

on retombe donc sur l'étude précédente, à condition de remarquer que le maximum de $|H'|$ est $\frac{R}{R+R_{bobine}}$, et non plus 1,

et que le coefficient d'amortissement est $\sigma' = \frac{R+R_{bobine}}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$

Calculer ω_0, f_0, Q'_0, σ', f_1, f_2, $f_1 - f_2$, reporter ces valeurs dans le tableau ci-dessous.

alimenter au moyen d'un générateur B.F (amplitude de 5 volts), et faire varier la fréquence de 1kHz à 30 kHz par pas de 2kHz, sauf au voisinage de la fréquence de résonance, où on multipliera les points.

relever la fréquence, les tensions et le déphasage à l'oscilloscope (menu "mesures", F,Vpp, φ), remplir un tableau sous regressi, calculer le rapport Vs/Ve, et tracer le diagramme de bode (H et phase); imprimer les courbes.

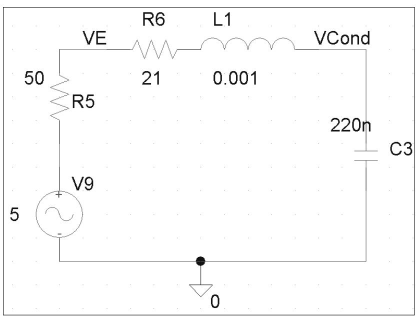
relever sur les courbes obtenues f_0, f_1, f_2, en déduire Q'_0, σ', $f_1 - f_2$, reporter ces valeurs dans le tableau ci-dessous. Comparer avec les valeurs calculées.

valeurs calculées						valeurs mesurées					
f_0	Q'_0	σ'	f_1	f_2	$f_1 - f_2$	f_0	Q'_0	σ'	f_1	f_2	$f_1 - f_2$

vous pourrez, s'il reste du temps, recommencer l'étude avec les valeurs suivantes:
R = 50Ω L = 0,47mH (r = 7,0Ω) C = 220 nF

2.2 comparaison avec la résonance en tension aux bornes de C

permuter R et C de façon à mesurer maintenant la tension aux bornes de C (montage du **1.2**) R_{totale} = 5 + 16 = 21Ω



(cette fois, la résistance de la bobine intervient seulement dans la résistance totale, et ne perturbe pas la mesure de la tension)

on veillera toujours, que la tension mesurée ne dépasse pas 5V, tension maximale admissible par la carte d'acquisition

alimenter au moyen d'un générateur B.F (amplitude de 5 volts),

faire varier la fréquence de 1kHz à 30 kHz par pas de 2kHz, sauf au voisinage de la fréquence de résonance, où on multipliera les points.

tracer à nouveau les courbes H(f) et φ(f), en déduire la valeur de la surtension aux bornes de C, la valeur de la pulsation de résonance en tension ω_r, et déduire à partir de cette valeur, Q_0 et σ;
comparer avec les valeurs précédemment obtenues, et relever les différences avec la résonance en courant.