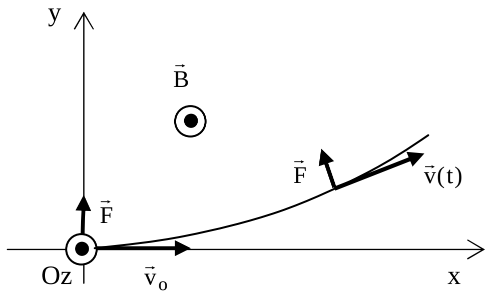
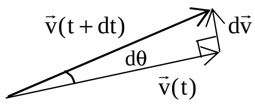
déviation d'un électron par un champ magnétique et mesure du rapport e/m

1. accélération par le champ électrique : le théorême de l'énergie cinétique permet d'écrire, entre la sortie du filament et l'anode : $\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = W(q\vec{E}) = eU$ avec $v_i = 0$ il vient $\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m}}}$



2. l'électron pénètre ensuite dans le champ $\vec{B}$ uniforme de direction Oz :
La force magnétique s'écrit $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ et le travail de cette force au cours d'un déplacement élémentaire $d\vec{\ell} = \vec{v}dt$ s'écrit $\delta W = q(\vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{v}dt = 0$
le travail de la force magnétique est nul, donc la norme de la vitesse est constante et reste égale à v_0, seule sa direction change.

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$



donc la variation de vitesse $d\vec{v}$ restant orthogonale à $\vec{B}$, la vitesse reste dans le plan xOy; entre t et t+dt, la vitesse tourne d'un angle dθ faible égal à sa tangente $d\theta = \frac{dv}{v}$ or $dv = \frac{ev_0B}{m}dt$

donc $d\theta = \frac{1}{v_0}\frac{ev_0B}{m}dt = \omega dt$ d'où $\omega = eB/m$: le vecteur vitesse tourne dans le plan xOy à la vitesse angulaire $\omega = eB/m$

il s'écrit donc : $\vec{v} = \begin{cases} v_0 \cos\omega t \\ v_0 \sin\omega t \end{cases}$ et par intégration, en tenant compte des conditions initiales x(0)=y(0)=0 :

$$\begin{cases} x = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t + x_0 = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \\ y = -\frac{v_0}{\omega}\cos\omega t + y_0 = \frac{v_0}{\omega}(1-\cos\omega t) \end{cases} \quad \text{ou enfin} \quad \begin{cases} x = \frac{mv_0}{eB}\sin\left(\frac{eB}{m}\right)t \\ y = \frac{mv_0}{eB}\left(1-\cos\left(\frac{eB}{m}\right)t\right) \end{cases}$$

l'électron décrit un cercle de rayon $R = \frac{mv_0}{eB}$ à la pulsation $\omega = eB/m$

enfin, en projection sur le rayon du cercle, la relation fondamentale de la dynamique se réduit à $m\frac{{v_0}^2}{R} = ev_0B$, et en utilisant les expressions de v_0 et de R, on obtient : $\boxed{e/m = 2U/B^2R^2}$

---

remarque : on pouvait utiliser la dérivation d'un vecteur dans un repère tournant : si $\vec{v}$ est fixe dans R' tournant par rapport à R (laboratoire) à vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$, on utilise la loi de dérivation d'un vecteur dans un référentiel mobile :

$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}$ mais $\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{R'} = \vec{0}$ et $m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ il vient: $\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_R = \frac{q}{m}\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right) = \frac{e\vec{B}}{m} \wedge \vec{v}$

d'où $\begin{cases} \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_R = \vec{\omega} \wedge \vec{v} \\ \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_R = \frac{e\vec{B}}{m} \wedge \vec{v} \end{cases}$ ce qui donne encore : $\boxed{\vec{\omega} = \frac{e}{m}\vec{B}}$
